Loi uniforme. Loi exponentielle

I) Loi uniforme de probabilité sur [a : b]

La loi de probabilité qui admet pour densité la fonction f constante égale à $\frac{1}{b-a}$ sur $[a\ ;\ b]$, est appelée loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$

Soit $[c\ ;\ d]$ un intervalle inclus dans $[a\ ;\ b]$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$, alors :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Propriétés :

Si X est une loi de probabilité suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\ ;b]$ alors cela signifie que X est une loi continue dont la densité est la fonction constante f définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ est $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Exemples :

1) Dans une ville (idéale) les autobus passent à chaque arrêt exactement toutes les 20 minutes. On appelle X le temps d'attente en minutes d'un autobus à un arrêt. X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 20], on a donc :
$P(5 \leq X \leq 18) = \frac{18-5}{20} = \frac{13}{20}$ et $P(X \geq 12) = P(12 \leq X \leq 20) = \frac{20-12}{20} = \frac{8}{20}$
enfin le temps d'attente moyen qui est égal à $E(X)$ vaut $\frac{0+20}{2}$ soit 10 minutes.

2) La fonction « alea » d'une calculatrice affiche au hasard un nombre réel appartenant à]0 ; 1[. Soit X le nombre affiché, X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur]0 ; 1[. On a donc :

$P(0{,}15 \leq X \leq 0{,}40) = \frac{0{,}40-0{,}15}{1-0} = 0{,}25$ et $P(X \geq 0{,}8) = P(0{,}8 \leq X \leq 1) = \frac{1-0{,}8}{1-0} = 0{,}2$

Remarque :

Si X suit une loi uniforme sur $[a\ ;b]$ on définit **la fonction f appelée fonction de répartition de** X de la façon suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ si } x \geq b \end{cases}$

II) Loi exponentielle

1) Définition

Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Remarque :

On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité sur [0 ; + ∞ [en effet :

- La fonction f est continue et positive sur [0 ; + ∞ [
- Pour tout nombre a positif, $\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$ donc

$\lim_{a\to+\infty} f(x)dx = 1$

Ce qui signifie que l'aire sous la courbe de f sur [0 ; + ∞ [est égale à 1

Résultats :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, et a et b deux réels positifs ou nuls ,alors on a:

- $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$
- $P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Exemples :

Exemple 1 : La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$

La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans est

$P(X \geq 5) = 1 - \int_0^5 0{,}125\, e^{-0{,}125t}\, dt = e^{-0{,}125 \times 5} \approx 0{,}535$

La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable soit inférieure à 3 ans

est $P(X \leq 3) = \int_0^3 0{,}125\, e^{-0{,}125t}\, dt = 1 - e^{-0{,}125 \times 3} \approx 0{,}313$

Exemple 2 : Le temps d'attente exprimé en minutes au guichet d'une banque est une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité qu'un client attende moins de 8 minutes est égale à 0,7.

a) Calculer une valeur approchée à 0,0001 de λ

On a $P(T \leq 8) = 0{,}7$ donc $1 - e^{-8\lambda} = 0{,}7$

De là $e^{-8\lambda} = 0{,}3$ et donc $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}3)}{-8} \approx 0{,}1505$

b) Calculer la probabilité qu'un client attende entre 15 et 20 minutes

$$P(15 \leq T \leq 20) = e^{-0{,}1505 \times 15} - e^{-0{,}1505 \times 20} \approx 0{,}055$$

2) Propriétés

a) Espérance mathématique d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$),alors :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration :

La fonction $G(t) = \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ a pour dérivée $G'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ d'où

$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \to +\infty} [G(t)]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \left[-\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right]$

Comme on sait que $\lim_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x} = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ on a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Remarque : E(X) représente la valeur moyenne de la variable aléatoire de X

Exemple :

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ telle que sa valeur moyenne soit égale à 20, alors on peut écrire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 20$

d'où $\lambda = \dfrac{1}{20}$

b) Probabilité conditionnelle

Pour tout $t \geq 0$ et tout $a \geq 0$ on a $P_{X \geq a}(X \geq a+t) = P(X \geq t)$

Démonstration :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Soit t et a deux réels strictement positifs. On cherche la probabilité que X soit supérieure ou égale à $a + t$ sachant que X est supérieure à a

$$P_{X \geq a}(X \geq a+t) = \frac{P(X \geq a+t \text{ et } X \geq a)}{P(X \geq a)}$$

D'où

$$P_{X \geq a}(X \geq a+t) = \frac{P(X \geq a+t)}{P(X \geq a)} = \frac{e^{-\lambda(a+t)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

D'où le nom de « loi de durée de vie sans vieillissement » donné quelquefois à la loi exponentielle.

Exemple :

La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$

La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans sachant qu'il fonctionne depuis déjà 2 ans est égale à

$$P_{X \geq 2}(X \geq 5) = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 2)} = \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-3\lambda} = P(X \geq 3) = e^{-0{,}125 \times 3} \approx 0{,}687$$

c) Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, on définit la fonction F appelée fonction de répartition de X de la façon suivante :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$