# Lois continues de probabilité

## I) Définition

**Soit I un intervalle borné ou non de ℝ . Une variable aléatoire $X$ est dite continue de l'intervalle I si elle prend toutes les valeurs réelles de I.**

**Exemples :**

La durée de vie d'un transistor, le temps d'attente à un guichet sont des variables aléatoires continues.

Il n'est plus possible alors de définir la loi de $X$ en énumérant les probabilités des événements $(X = x_i)$ , puisque dans ce cas , ces événements sont en nombre infini. Une autre approche est alors nécessaire.

On s'intéresse à des événements du type : « $X$ prend des valeurs comprises entre deux valeurs distinctes ».
On étudie uniquement les variables aléatoires continues dont la loi de probabilité est déterminée par une fonction f.

## II) Densité de probabilité d'une variable aléatoire

### 1) Définition

**On appelle fonction densité de probabilité toute fonction $f$ définie sur un intervalle [a ; b] de ℝ vérifiant les conditions suivantes :**

- **$f$ est continue sur l'intervalle [a ; b];**
- **pour tout $x$ de [a ; b] , $f(x) \geq 0$ ;**
- **$\int_a^b f(t)dt = 1$ (L'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à 1).**

**Exemples**

1) La fonction $f$ définie sur l'intervalle I = [0 ; 1] par $f(x) = 3x^2$ peut être considérée comme une densité de probabilité sur I. En effet $f$ est continue et positive sur I et de plus $\int_0^1 f(x)dx = [x^3]_0^1 = 1$

2) La fonction $g$ définie sur l'intervalle I = [0 ; 10] par $g(x) = \dfrac{x}{50}$ peut être considérée comme une densité de probabilité sur I. En effet $g$ est continue et positive sur I et de plus $\int_0^{10} g(x)dx = \left[\dfrac{x^2}{100}\right]_0^{10} = 1$

**Remarques** :

● Lorsque $f$ est définie sur un intervalle non borné, par exemple [a ; + ∞ [ , la condition portant sur l'aire sous la courbe de $f$ s'écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$$

● Lorsque $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ la condition portant sur l'aire sous la courbe de f s'écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$$

## 2) Variable aléatoire $X$ de densité $f$

**Soit $X$ une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction densité de probabilité définie sur I.**

**On dit que la loi de $X$ admet $f$ comme densité de probabilité lorsque, pour tout intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$ inclus dans I , on a :**

$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt}$ **.**

**Remarques :**

● On dit que la variable aléatoire $X$ suit **la loi continue de densité $f$ sur I**

● Si I = [a ; b] alors :

1) $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt = 1$ .

2) $P(X \leqslant c) = \int_a^c f(t)dt$ .

3) $P(X \geqslant c) = 1 - P(X \leqslant c) = 1 - \int_a^c f(t)dt$.

4) Pour tout intervalle [$c$ ; $d$] inclus dans I , $0 \leqslant P(c \leqslant X \leqslant d) \leqslant 1$ . En effet pour tout $x$ de I, $f(x) \geqslant 0$ et $\int_c^d f(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)dt$. On retrouve des caractérisations analogues à celles des lois de probabilité discrètes

● P (X = $\alpha$ ) = 0 , pour tout $\alpha \in$ I . La probabilité d'une valeur fixe isolée est nulle.
Il en résulte que : $P(X < \alpha) = P(X \leqslant \alpha)$ .

**Exemples :**

1) Si $X$ est une variable aléatoire définie sur I = [ 0 ; 1 ] de densité $f(x) = 3x^2$ alors

$P(0{,}2 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{0{,}2}^{0{,}5} f(x)dx = 0{,}5^3 - 0{,}2^3 = 0{,}125 - 0{,}008 = 0{,}117$ et

$P(X \leq 0{,}7) = \int_0^{0{,}7} f(x)dx = 0{,}7^3 = 0{,}343$

2) Si Y est une variable aléatoire définie sur I = [0 ; 10] de densité $g(x) = \dfrac{x}{50}$ alors

$P(4 \leq X \leq 8) = \int_4^8 g(x)dx = \dfrac{8^2}{100} - \dfrac{4^2}{100} = = 0{,}64 - 0{,}16 = 0{,}48$ et

$P(Y \geq 5) = \int_5^{10} g(x)dx = \frac{10^2}{100} - \frac{5^2}{100} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

## 3) Espérance mathématique d'une variable $X$ de densité $f$

- **Si I = [a, b]** $\quad \mathbf{E}(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$
- **Si I = [a ; + ∞[** $\quad \mathbf{E}(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x t \times f(t)dt$
- **Si I = $\mathbb{R}$** $\quad \mathbf{E}(X) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t \times f(t)dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt$

**Remarque :** L'espérance mathématique de la variable aléatoire correspond à la valeur moyenne prise par $X$ sur l'intervalle I

**Exemples :** sur les deux exemples précédents on a :

1) $E(X) = \int_0^1 t\, f(t)dt = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}$

2) $E(Y) = \int_0^{10} t\, g(t)dt = \int_0^{10} \frac{t^2}{50}\, \mathrm{dt} = \frac{10^3}{150} = \frac{20}{3}$