Définition d'une fonction

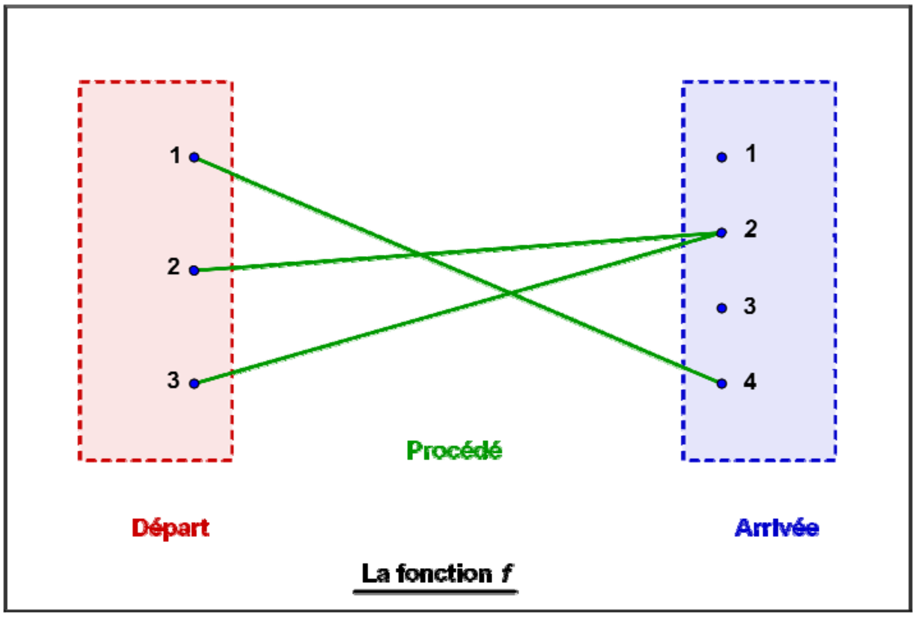
I) Bien définir une fonction.

Pour définir une fonction, on a besoin de trois données :

- **Un ensemble de départ, aussi appelé domaine de définition.**
- **Un ensemble d'arrivée**
- **Un procédé qui, à tout élément de l'ensemble de départ, associe un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.**

Dans la rédaction mathématique, il est d'usage de désigner un tel objet mathématique par une lettre**. Souvent, la lettre f qui est utilisée.**

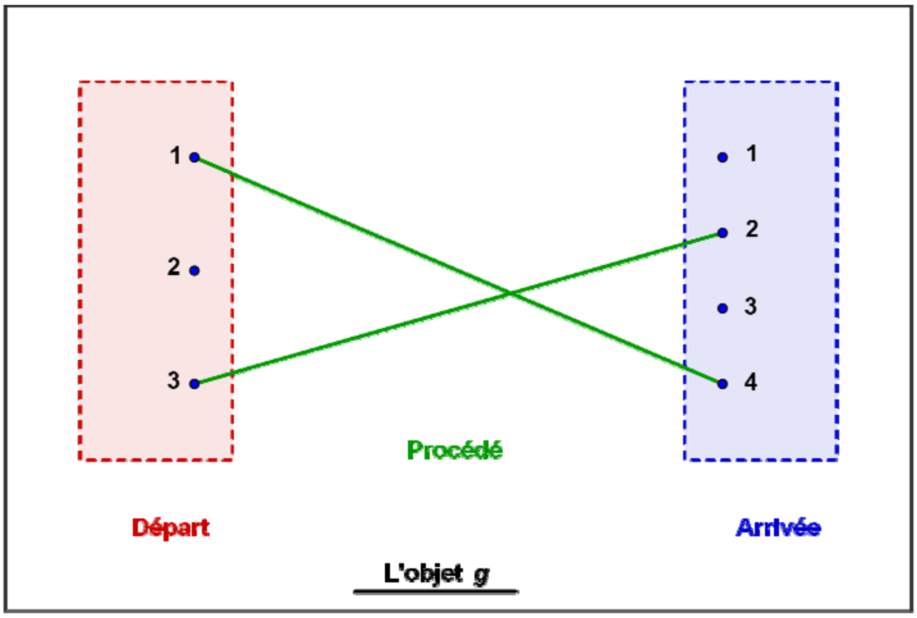
Exemple A



Dans cet exemple, l'ensemble de départ est $\{1;2;3\}$ et l'ensemble d'arrivée est $\{1;2;3;4\}$. Au nombre 1, f associe le nombre 4, au nombre 2, f associe le nombre 2, au nombre 3, f associe le nombre 2. **A chaque nombre de l'ensemble de départ, f associe une et une seule valeur de l'ensemble d'arrivée. La fonction f est donc bien définie.**

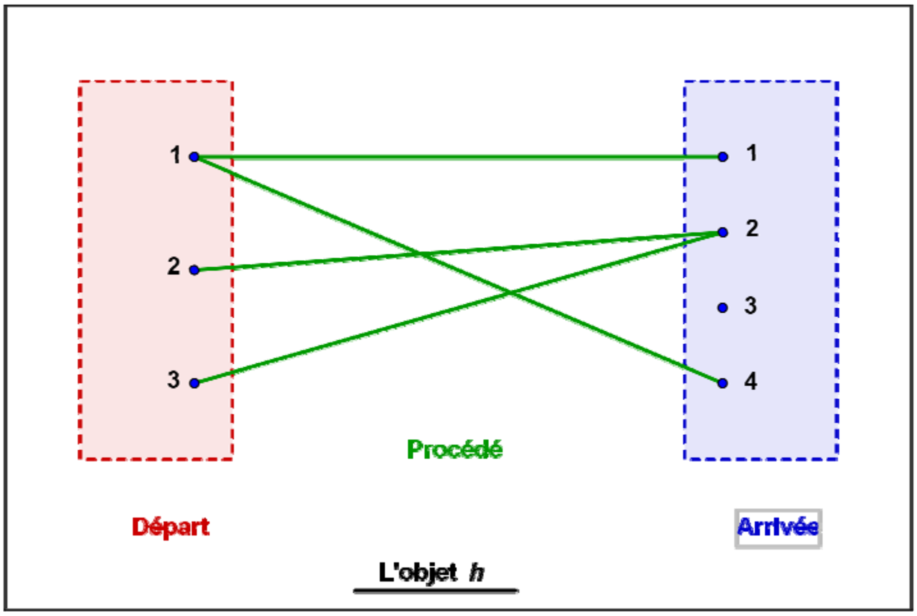
N.B. : Le fait que f associe le nombre 2 aux nombres 2 et 3 et le fait que 1 et 3 ne soient pas atteints ne contredisent pas la définition de fonction.

Exemple B



Dans cet exemple, l'ensemble de départ est $\{1;2;3\}$ et l'ensemble d'arrivée est $\{1;2;3;4\}$. Au nombre 1, g associe le nombre 4, au nombre 2, g n'associe rien, au nombre 3, g associe le nombre 2. **Il existe un nombre de l'ensemble de départ, auquel g n'associe aucune valeur de l'ensemble d'arrivée, g est donc mal définie et n'est pas une fonction.**

Exemple C



Dans cet exemple, l'ensemble de départ est $\{1;2;3\}$ et l'ensemble d'arrivée est $\{1;2;3;4\}$. Au nombre 1, h associe le nombre 1 et le nombre 4, au nombre 2, h associe 2, au nombre 3, g associe le nombre 2. **Il existe un nombre de l'ensemble de départ, auquel h associe deux valeurs de l'ensemble d'arrivée, h est donc mal défini et n'est pas une fonction.**

Exemple D

On prend l'intervalle $[-1;2]$ comme ensemble de départ, et $[0;2]$ comme ensemble d'arrivée. La fonction qui, à un nombre de l'ensemble de départ, associe son carré, est mal définie, car au nombre 2 devrait être associé 4. C'est impossible car 4 n'est pas dans l'ensemble d'arrivée.

En revanche, en prenant $[0;5]$ comme ensemble d'arrivée, la fonction est bien définie.

Exemple E

On prend l'intervalle $[-1;2]$ comme ensemble de départ, et $[-1;2]$ comme ensemble d'arrivée. La fonction qui, à un nombre de l'ensemble de départ, associe sa racine carrée, est mal définie, car au nombre -1, aucun nombre ne peut être associé. C'est impossible car -1 n'a pas de racine carrée.

En revanche, en prenant $[0;2]$ comme ensemble de départ, la fonction est bien définie.

II) Vocabulaire et notations.

1) Notation.

Pour définir une fonction, on utilise souvent la mise en page suivante :

$$f : \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Où :
A désigne l'ensemble de départ,
B désigne l'ensemble d'arrivée,
f est le nom de la fonction,
x désigne un élément quelconque de l'ensemble A,
$f(x)$ est un élément de B et désigne la valeur numérique qui est associée à x.

Cette écriture comporte deux flèches.
Celle du haut relie les deux ensembles de départ et d'arrivée, c'est une flèche simple.
Celle du bas relie deux nombres, elle remplace le verbe « associe », elle est munie d'une barrette à son extrémité gauche.

2) Vocabulaire.

Soit $f : \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ une fonction.

Soit x, un élément de A. On appelle image de x par f l'unique élément de B, noté $f(x)$, qui est associé à x par f.

Soit y est un élément de B. S'il existe un élément x appartenant à l'ensemble A tel que $y = f(x)$, alors cet élément x est appelé antécédent de y par f.

Remarque : Il se peut que certains éléments de B n'admette pas d'antécédent par f.
Il se peut que certains éléments de B aient plusieurs antécédents.

Exemple

Soit $f : \begin{array}{l} [-1;2] \longrightarrow [0;5] \\ \quad x \longmapsto x^2 \end{array}$.

L'image de 1 par f est 1, on peut aussi écrire $f(1) = 1$. L'image de 2 par f est 4, on peut aussi écrire $f(2) = 4$.. Le nombre 3 n'a pas d'image par f.

Le nombre 1 admet 1 et -1 comme antécédents par f. En effet, $f(-1) = f(1) = 1$.
En d'autres termes, 1 et -1 ont tous les deux 1 pour image.

L'antécédent de 0 est 0. L'antécédent de 3 est $\sqrt{3}$. Attention, $-\sqrt{3}$ n'est pas un antécédent de 3 car $-\sqrt{3}$ n'est pas un élément de l'ensemble de départ.

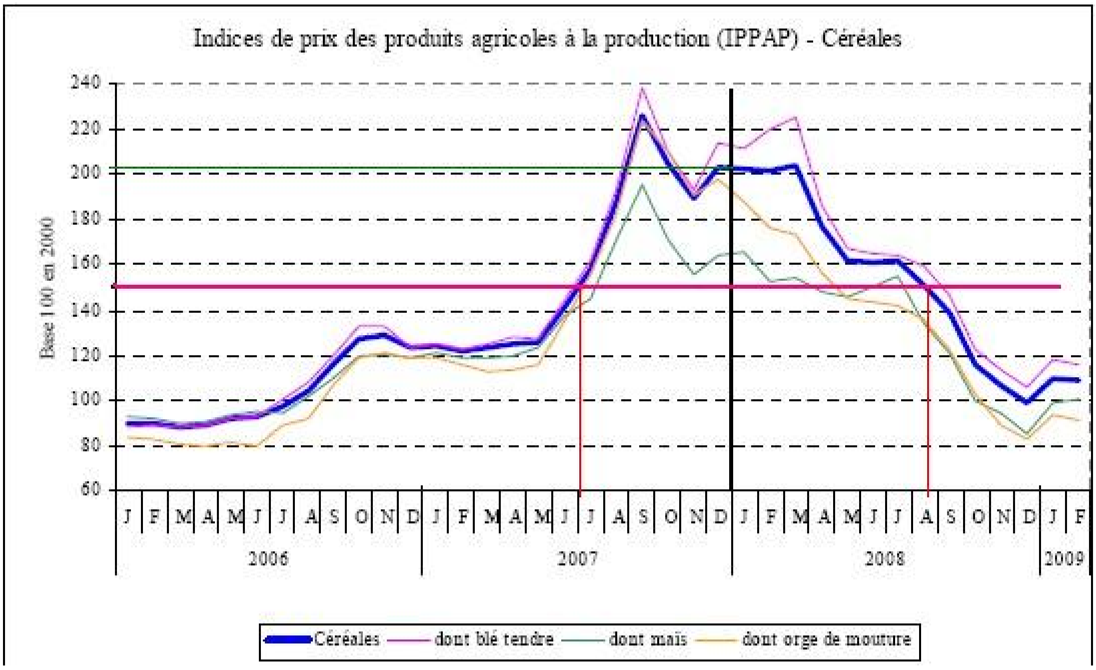
Le nombre 5 n'a pas d'antécédent par f.

On ne cherche pas l'antécédent ou les antécédents de 6 par f car 6 n'est pas un élément de l'ensemble d'arrivée de f.

III) Différentes façons de définir une fonction.

Pour définir une fonction, on utilisera essentiellement :

- **Une formule.** Par exemple, on pourra définir une fonction en disant : « Soit f la fonction définie sur $[-1,2]$ à valeurs dans $[0;5]$ par $f(x) = x^2$ ». C'est la fonction de l'exemple E. En pratique, on néglige souvent de donner l'ensemble d'arrivée.
- **Une représentation graphique, une courbe dessinée dans un plan muni d'un repère.** Par exemple :
-



-

Cette représentation graphique donne l'indice des prix des céréales (courbe bleue) comme fonction du temps.
L'ensemble de départ est l'intervalle de temps du 15 janvier 2006 au 15 février 2009.
L'ensemble d'arrivée est l'intervalle $[60;240]$.

Pour connaître l'indice des prix des céréales au 1er janvier 2008, par exemple, c'est-à-dire l'image de 1er janvier 2008 par cette fonction, il suffit de repérer cette date sur l'axe des dates, d'y tracer la parallèle à l'axe où sont repérés les indices jusqu'à rencontrer la courbe bleue (droite noire). A cette intersection, on définit un point à partir duquel on trace la parallèle à l'axe des dates (droite verte).
A l'intersection de cette parallèle et de l'axe des indices, on peut lire l'indice du premier janvier 2008. Je lis l'indice 203 environ.

Pour connaître les dates auxquelles l'indice valait 150, c'est-à-dire trouver les antécédents par cette fonction de l'indice 150, on repère sur l'axe des indices le point correspondant à l'indice 150. On trace la parallèle passant par ce point à l'axe des dates (droite fuschia). A l'intersection de cette parallèle et de la courbe bleue, on trouve deux points à partir desquelles on abaisse deux parallèles à l'axe des indices (droites rouges). A l'intersection de ces deux parallèles avec l'axe des dates, on lit les dates auxquelles l'indice valait 150. Je lis 2 juillet 2007 et le 18 août 2008 environ.