Fonctions homographiques

On donne ci-dessous deux définitions des fonctions homographiques, et on montre que ces deux définitions sont équivalentes. On décrit la courbe représentative d'une fonction homographique. On résout les équations de type $f(x) = k$, dont les propriétés sont particulières quand f est une fonction homographique.

I) Définition 1 : fraction.

Soit f et g deux fonctions affines. Il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ pour tout x réel.

On définit la fonction h en posant $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

On constate que, si c est non nul, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $-\frac{d}{c}$. On ne pourra donc définir la fonction h que sur des domaines ne comprenant pas la valeur $-\frac{d}{c}$.
Si c est nul et d est non nul, la fonction g est constante et par conséquent h est affine.
Si c et d sont nuls, h n'est pas définie.

Remarques à ne lire qu'en deuxième lecture. On constate qu'en réalité, des conditions plus restrictives doivent être observées pour obtenir une fonction h homographique non triviale, c'est-à-dire sans simplification.

- Il faut que c et d ne soient pas simultanément nuls, sans quoi on ne peut définir le rapport.
- Si a et b sont simultanément nuls, alors la fonction h est identiquement nulle, cas à écarter lui aussi.
- On écarte le cas $c = 0$ et d non nul dans lequel la fonction g est constante et par conséquent h est affine.
- Reste un cas plus délicat à exclure : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs de composantes respectives $(a\,;b)$ et $(c\,;d)$, supposés non nuls.

Supposons que ces deux vecteurs sont colinéaires. Alors, il existe un réel k tel que : $a = kc$ et $b = kd$. Donc pour x différent de $-d/c$,

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{kcx + kd}{cx + d} = \frac{k(cx + d)}{cx + d} = k$$

Dans ce cas précis, la fonction h est une fonction constante, cas à écarter également.

Ces difficultés sont toutes résolues si $ad - bc$ et c sont non nuls, comme on peut le voir en étudiant l'identité

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \times \frac{ad - bc}{cx + d}$$

II) Définition 2 : algorithme.

Dans ce paragraphe, on propose de construire une fonction particulière en enchaînant le calcul de plusieurs fonctions élémentaires.

Les calculs qui suivent sont fondés sur l'identité suivante, valable pour cinq réels a, b, c, d et x tels que c et $cx + d$ sont non nuls :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \times \frac{ad-bc}{cx+d}$$

La connaissance de cette formule n'est pas exigible. En revanche, un élève doit être capable, sur un exemple explicite, de prouver ce type d'identité, en commençant son calcul par le membre de droite.

Exemple. Montrer l'identité :

$$\frac{4x+17}{2x+7} = 2 + \frac{3}{2x+7}\ ,\quad x \neq -\frac{7}{2}$$

Réponse :

$$Pour\ x \neq -\frac{7}{2}, \qquad 2 + \frac{3}{2x+7} = \frac{2(2x+7)}{2x+7} + \frac{3}{2x+7} = \frac{4x+14+3}{2x+7} = \frac{4x+17}{2x+7}$$

PRINCIPE ALGORITHMIQUE: on suppose donnés un stock de fonctions u, v, w… On construit une nouvelle fonction de la façon suivante.

Algorithme :

On choisit x, un réel,

Si c'est possible, on calcule $u(x)$;

On appelle $x_1 = u(x)$;

Si c'est possible, on calcule $v(x_1)$;

On appelle $x_2 = v(x_1)$;

Si c'est possible, on calcule $w(x_2)$;

…

Et ainsi de suite tant qu'il y a des fonctions dans le stock de fonctions.

Cas des fonctions homographiques.

On suppose que le stock ne contient que des fonctions linéaires, des translations (on appelle ici translation une fonction qui, à x associe x+k où k est un nombre fixé.) et, enfin, une et une seule fois la fonction inverse.

Exemple. Stock : r(x)=x+3 ; s(x)=-2x ; t(x)=1/x, la fonction inverse ; u(x)=4x ; v(x)=x-1.

Soit x un nombre.

On calcule successivement :

Avec la fonction r :

$$x+3$$

Avec la fonction s :

$$-2(x+3)$$

Avec la fonction t :

$$\frac{1}{-2(x+3)}$$

Avec la fonction u :

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-2(x+3)}}$$

Avec la fonction v :

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-2(x+3)}}-\mathbf{1}$$

Cette fonction est homographique car :

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-2(x+3)}}-\mathbf{1}=\frac{\mathbf{4+2(x+3)}}{\mathbf{-2(x+3)}}=\frac{\mathbf{2x+10}}{\mathbf{-2(x+3)}}=\frac{\mathbf{x+5}}{\mathbf{-x-6}}$$

On retrouve la fraction de fonctions affines de la définition 1.
On constate que l'emploi de la fonction inverse n'est possible que si $\mathbf{-2(x+3)\neq 0}$, c'est-à-dire si $\mathbf{x\neq -3}$.

Le problème de reconstruction d'un algorithme et d'un stock de fonctions, en ayant pour donnée une fonction homographique h est plus difficile. On traite ci-dessous un exemple.

Exemple. Soit h la fonction définie par :

$$h(x)=\frac{2x-5}{3x+2} \quad \text{avec} \quad x\neq\frac{-2}{3}$$

On pourra demander à un élève de seconde de prouver l'identité :

$$\frac{2x-5}{3x+2}=\frac{2}{3}-\frac{19}{9(x+\frac{2}{3})}$$

Pour y arriver, le plus simple est de partir du membre de droite :

$$pour\ x\neq-\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}-\frac{19}{9(x+\frac{2}{3})}=\frac{2(3x+2)}{9x+6}-\frac{19}{9x+6}=\frac{6x+4-19}{9x+6}=\frac{6x-15}{9x+6}=\frac{2x-5}{3x+2}$$

A partir de cette identité, on reconstruit le stock de fonctions :

On part de $x\neq-2/3$.

On calcule

$$x+\frac{2}{3}$$

Puis

$$9(x+\frac{2}{3})$$

Puis

$$\frac{1}{9(x+\frac{2}{3})}$$

Puis

$$-\frac{19}{9(x+\frac{2}{3})}$$

Puis

$$\frac{2}{3}-\frac{19}{9(x+\frac{2}{3})}=f(x)$$

Ceci qui termine le calcul.
Le stock de fonctions à constituer est donc:

$$r(x)=x+\frac{2}{3} \qquad s(x)=9x \qquad t(x)=\frac{1}{x} \qquad u(x)=-19x \qquad v(x)=x+\frac{2}{3}$$

III) Représentation graphique.

Etant donnés quatre nombres réels a, b, c et d tels que c et $ad - bc$ sont non nuls, on définit h, fonction homographique, par :

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Sens de variation.

Théorème :

On pose :

$$D = ad - bc$$

Si D est strictement positif, alors h est strictement croissante sur tout domaine inclus soit dans $]-\infty; -d/c[$ soit dans $]-d/c; +\infty[$.

Si D est strictement négatif, alors h est strictement décroissante sur tout domaine inclus soit dans $]-\infty; -d/c[$ soit dans $]-d/c; +\infty[$.

Preuve. A partir de l'identité :

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2x + cd}$$

valable sur $I =]-\infty; -c/d[$ et $J =]-d/c; +\infty[$, considérons deux réels u et v appartenant tout les deux soit à I, soit à J. Supposons $u < v$. Alors :

$$c^2u + cd < c^2v + cd$$

En effet l'application qui à x associe $c^2x + cd$ est affine et c^2 est strictement positif.
La fonction inverse est décroissante strictement sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Donc :

$$\frac{1}{c^2u + cd} > \frac{1}{c^2v + cd}$$

Enfin, si D est strictement positif, la fonction affine qui à x associe a/c-$(ad - bc)x$ est strictement décroissante. Donc :

$$h(u) = \frac{a}{c} \text{-} (ad - bc)\frac{1}{c^2u + cd} < \frac{a}{c} \text{-} (ad - bc)\frac{1}{c^2v + cd} = h(v)$$

Finalement, si $u < v$, alors $h(u) < h(v)$. Donc h est strictement croissante.

Si D est strictement négatif, la fonction affine qui à x associe a/c-$(ad - bc)x$ est strictement croissante. Donc :

$$h(u) = \frac{a}{c} \text{-} (ad - bc)\frac{1}{c^2u + cd} > \frac{a}{c} \text{-} (ad - bc)\frac{1}{c^2v + cd} = h(v)$$

Finalement, si $u < v$, alors $h(u) > h(v)$. Donc h est strictement décroissante.

Exemples. Soit f et g les fonctions définies par :

$$x \neq -\frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{x + 3}{2x + 1}$$

$$x \neq -6, \quad g(x) = \frac{2x - 3}{x + 6}$$

D'après le théorème, on a pour f :

$$D = ad - bc = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -4$$

D est strictement négatif, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -0{,}5[$ et sur $]-0{,}5; +\infty[$.

D’après le théorème, on a pour g:

$$D = ad - bc = 2 \times 6 - 1 \times (-3) = 15$$

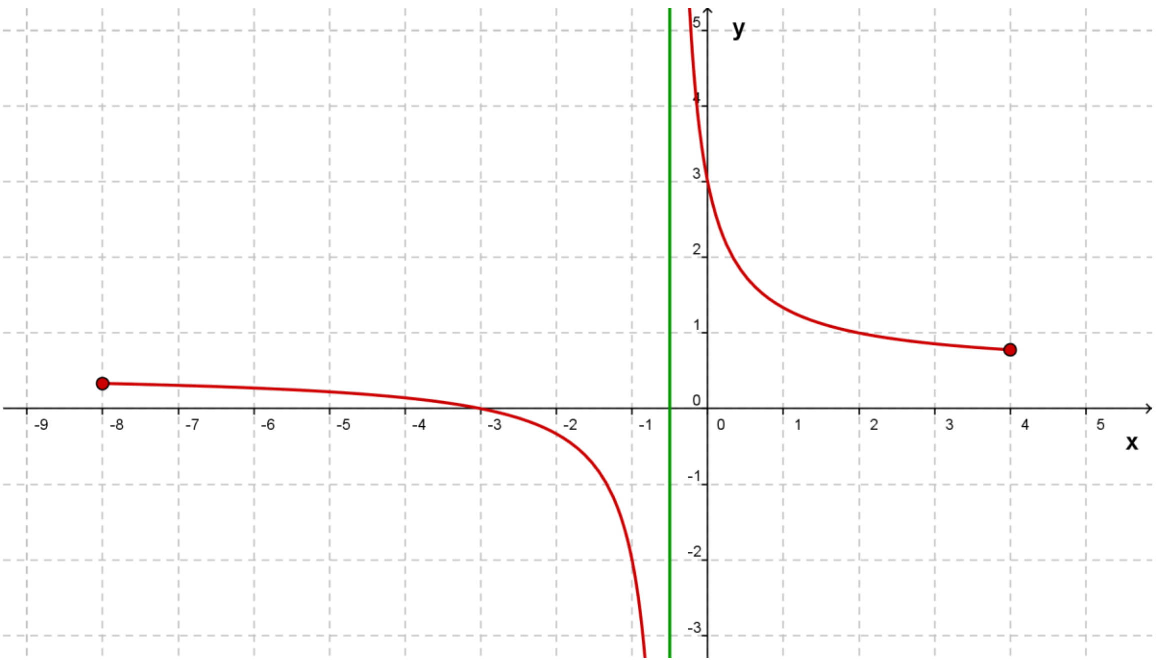
D est strictement positif, donc g est strictement croissante sur $]-\infty;-0{,}5[$ et sur $]-0{,}5;+\infty[$.

On donne maintenant leurs tableaux de variations :

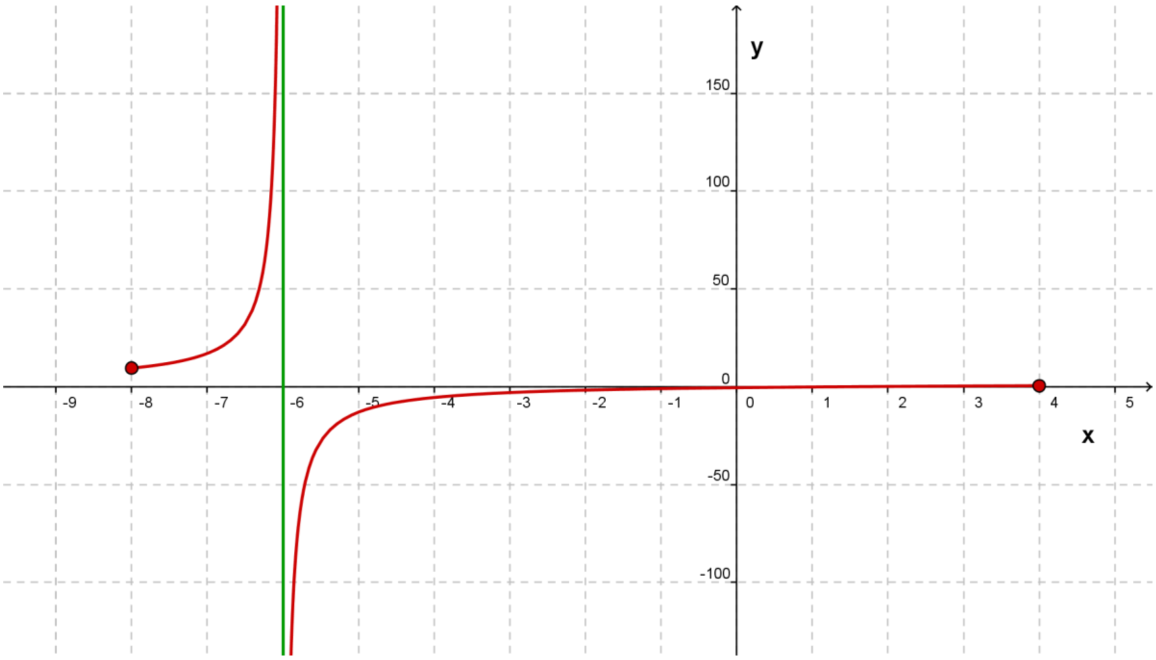
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

Courbe de f en restriction à $[-8;-0{,}5[\cup]-0{,}5;4[$.



Courbe de g en restriction à $[-8;-6[\cup]-6;4[$.



Existence d'un centre de symétrie.

Théorème. Le point de coordonnées

$$\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$$

est le centre de symétrie de la courbe de h, à condition que l'ensemble de définition de h soit symétrique par rapport au nombre $-d/c$.

Preuve. Soit

$$u=-\frac{d}{c}+m \quad et \quad v=-\frac{d}{c}-m$$

Ces deux nombres sont symétriques par rapport à $-d/c$. On a en particulier :

$$u+v=-\frac{2d}{c}$$

Il reste à prouver que leurs images sont des valeurs symétriques par rapport à a/c, ou encore, ce qui revient au même, que leur moyenne arithmétique est a/c, ou encore que leur somme vaut $2a/c$. Comme

$$\boldsymbol{h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2x+cd}}$$

on a :

$$\boldsymbol{h(u)+h(v)=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2u+cd}+\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2v+cd}=\frac{2a}{c}-\frac{ad-bc}{c}\left(\frac{1}{cu+d}+\frac{1}{cv+d}\right)}$$

Il reste donc à montrer que les dernières parenthèses contiennent un terme nul, ou, ce qui revient au même, que les deux dénominateurs des fractions sont opposés, c'est-à-dire que leur somme est nulle.

$$\boldsymbol{cu+d+cv+d=c(u+v)+2d=c\left(-\frac{2d}{c}\right)+2d=0}$$

CQFD

Exemple. La courbe de la restriction de la fonction g ci-dessus à la réunion d'intervalles $[-8;-6[\cup]-6;-4]$, qui est un domaine symétrique par rapport à la valeur -6, admet pour centre de symétrie le point de coordonnées $(-6;2)$.

IV) Résolution d'équations de type $f(x)=k$.

On peut faire appel à plusieurs méthodes pour ce type de résolution.

Pour la méthode graphique, on renvoie au chapitre spécialement consacré aux résolutions graphiques d'équations.

On résout algébriquement ces équations, puis on donne une interprétation de cette résolution avec l'algorithme du paragraphe II.

Résolution.

Soit k un nombre réel, et h, la fonction homographique définie par :

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

L'équation à résoudre est :

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad \frac{ax+b}{cx+d}=k$$

Elle équivaut à :

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad ax+b=k(cx+d)$$

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad ax+b=kcx+kd$$

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad (a-kc)x=kd-b$$

Elle équivaut, seulement dans le cas où $k \neq a/c$ à :

$$x \neq -\frac{d}{c}, \quad x=\frac{kd-b}{a-kc}$$

Or

$$-\frac{d}{c}=\frac{kd-b}{a-kc}$$

Equivaut à :

$$-ad+kcd=kcd-bc$$

C'est-à-dire à :

$$ad-bc=0$$

Ce qui est faux. Donc l'équation possède une et une seule solution qui est :

$$\frac{kd-b}{a-kc}$$

Exemple. Soit f la fonction définie par :

$$x \neq -\frac{1}{2}, \quad f(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

On veut résoudre les équations :

$$f(x)=3 \qquad f(x)=\frac{1}{2}$$

Résolution de la première : $f(x) = 3$ équivaut successivement à :

$$\frac{x+3}{2x+1} = 3 \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x + 3 = 3(2x+1) \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x + 3 = 6x + 3 \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$-5x = 0 \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x = 0 \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

La solution est donc 0 .

Résolution de la seconde équation :

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

équivaut successivement à :

$$\frac{x+3}{2x+1} = \frac{1}{2} \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x + 3 = \frac{1}{2}(2x+1) \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$x + 3 = x + \frac{1}{2} \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$3 = \frac{1}{2} \;\; et \;\; x \neq -\frac{1}{2}$$

C'est absurde. Il n'y a donc pas de solution.

Interprétation algorithmique.

Il s'agit de montrer que résoudre l'équation $h(x) = k$ consiste à remonter l'algorithme de construction de la fonction. On travaille sur un exemple.

Soit f la fonction définie par :

$$x \neq -\frac{1}{2}, \qquad f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

On veut résoudre l'équation :

$$f(x) = 3$$

On a les égalités, pour $x \neq -1/2$,

$$f(x) = \frac{x+3}{2x+1} = \frac{x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2x+1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4(x+\frac{1}{2})}$$

Posons $r(x) = x + 1/2$, $s(x) = 4x$, $t(x) = 1/x$, $u(x) = 5x$, $v(x) = x + 1/2$.

Ce stock de fonctions permet de construire la fonction f.

Considérons maintenant le stock de fonctions :

$V(x) = x - 1/2$, $U(x) = x/5$, $T(x) = 1/x$, $S(x) = x/4$, $R(x) = x - 1/2$.

On observe que chacune de ces fonctions en lettre majuscule fait exactement l'inverse de sa correspondante minuscule.

En les enchaînant, dans l'ordre ci-dessus, on doit donc faire exactement l'inverse de ce que fait la fonction f.

Or si $f(x) = 3$, cela veut dire que si l'on applique à la valeur x cherchée l'algorithme avec le stock de fonctions en lettres minuscules, alors on trouve 3.

Inversement, si l'on applique à 3 l'algorithme avec le stock de fonctions en lettres majuscules, on devrait trouver x, l'inconnue cherchée.

On essaye !

$V(x) = x - 1/2$, $U(x) = x/5$, $T(x) = 1/x$, $S(x) = x/4$, $R(x) = x - 1/2$.

Donc :

$$V(3) = 2{,}5 \qquad U(2{,}5) = 0{,}5 \qquad T(0{,}5) = 2 \qquad S(2) = 0{,}5 \qquad R(0{,}5) = \mathbf{0}$$

FA-BU-LEUX ! Il s'agit effectivement du résultat obtenu ci-dessus lors de la résolution sous forme « classique ». Ah ! Le bel algorithme !