Traductions algébriques du sens de variation et des extremums d'une fonction

I) Sens de variation d'une fonction

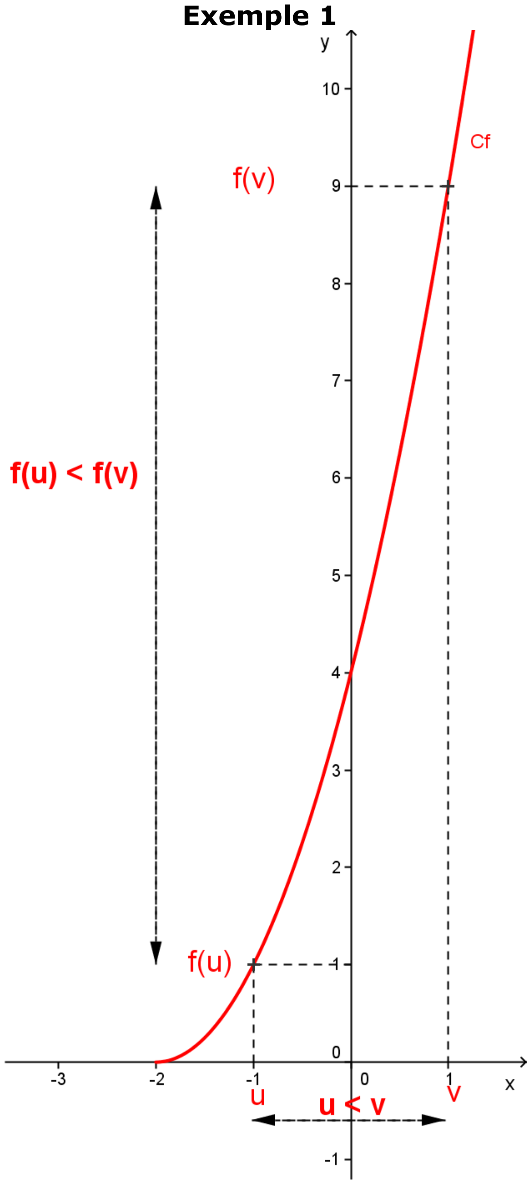
1) Définitions

• Une fonction f est croissante sur un intervalle I si :
Pour tous réels u et v appartenant à I tels que $u \leq v$ alors $f(u) \leq f(v)$. La fonction croissante conserve l'ordre

• Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si :
Pour tous réels u et v ppartenant à I tels que $u \leq v$ alors $f(u) \geq f(v)$. La fonction décroissante change l'ordre

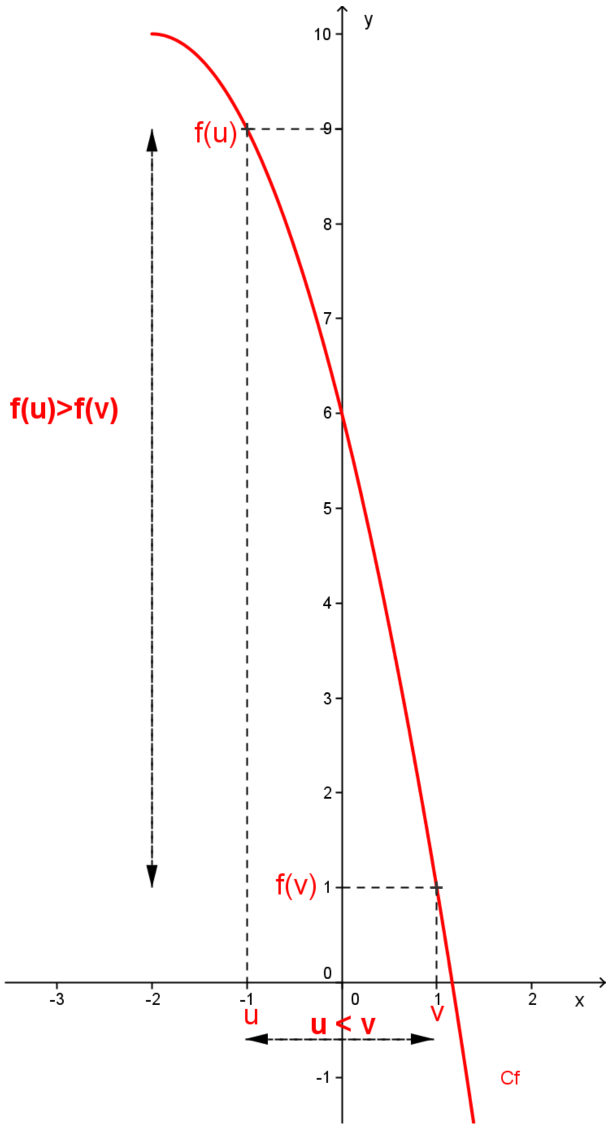
Remarque : Pour prouver qu'une fonction est croissante sur I la définition revient à prouver que **pour $v \geq u$ alors $f(v) - f(u) \geq 0$** et pour une fonction décroissante sur I que $f(v) - f(u) \leq 0$

Exemple 1



La fonction f est croissante sur [-2 ; 2]

Exemple 2



La fonction f est décroissante sur [-2 ;2]

2) Exemples

Exemple 1 .Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 5] par : $f : x \longmapsto 4x + 3$

Prouver algébriquement que la fonction f est croissante sur cet intervalle.

Remarque : Si on montre que $f(v) - f(u) \geq 0$ pour $v \geq u$ alors on en déduit que f est croissante

Pour tous réels u, v dans [-5 ;5] tel que $u \leq v$ on a :
$\boldsymbol{v - u \geq 0}$ **:**

$f(u) = 4u + 3$ et $f(v) = 4v + 3$

Donc Pour tous réels u, v de l'intervalle [-5 ;5] :

$f(v) - f(u) = 4v + 3 - (4u + 3) = 4v + 3 - 4u - 3$

$f(v) - f(u) = 4v - 4u + \underbrace{3 - 3}_{} =$

$4v - 4u + 0 = 4(v - u)$

$v - u \geq 0$ par hypothèse

On en déduit : $4(v - u) \geq 0$ donc $f(v) - f(u) \geq 0$

Donc la fonction f est bien croissante sur l'intervalle [-5 ; 5]

Exemple 2 : f est une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	0		2		5
$f(x)$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

1) Comparer $f(3)$ et $f(4)$.
2) Comparer les images de 1 et de $\sqrt{2}$

1) Les nombres 3 et 4 appartiennent à l'intervalle [2 ;5] et f est **croissante** sur cet intervalle
Comme 3 et 4 appartiennent tous les deux à cet intervalle et $3 \leq 4$ alors $f(3) \leq f(4)$

2) 1 et $\sqrt{2}$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 2] où f est **décroissante.**

Comme $1 \leq \sqrt{2}$ alors $f(1) \geq f(\sqrt{2})$

II) Extremums d'une fonction

1) Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I

• M est le maximum de f sur l'intervalle I s'il existe un nombre a appartenant à I tel que $f(a) = M$ et pour tout x appartenant à I : $f(x) \leq$ M

• m est le minimum de f sur l'intervalle I s'il existe un nombre b appartenant à I tel que $f(b) = m$ et pour tout x appartenant à I : $f(x) \geq$ m

2) Exemples :

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur [-6 ; 6] par la fonction $f(x) = x^2$. Montrer que 0 est un minimum de f sur l'intervalle : [-6 ; 6].

pour tout x de l'intervalle [-6 ; 6], $x^2 \geq 0$ (Un carré est toujours positif) et $f(0) = 0$

De là : $f(x) \geq f(0)$ pour tout x dans [-6 ; 6]

La fonction f admet donc un minimum qui est 0 atteint en $x = 0$.

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur [-2 ; 2] par la fonction $f(x) = -3x + 1$

Montrer que 7 est le maximum de f sur l'intervalle : [-2 ; 2].

Pour tout x dans [-2 ; 2], $x \geq -2$

• On multiplie les deux membres de l'inégalité par -3, on change donc son sens : $-3x \leq -6$.

• On ajoute 1 aux deux membres de l'inégalité : $-3x + 1 \leq 6 + 1$

On obtient : $-3x + 1 \leq 7$.

$f(-2) = 7$

De là : $f(x) \leq f(-2)$ sur [-2 ; 2].

La fonction f admet donc un maximum qui est 7 atteint en $x = -2$