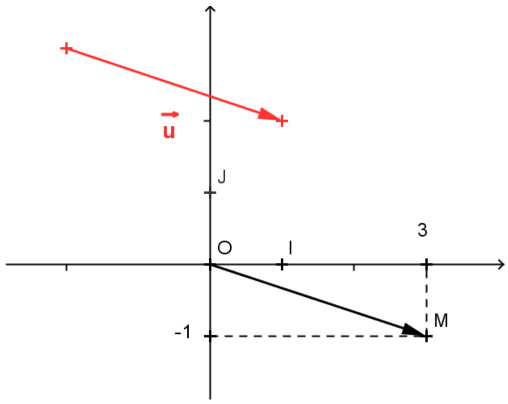
Coordonnées d'un vecteur

I) Coordonnées d'un vecteur

1) Définition

$(O\,;\,I\,,J)$ est un repère du plan et $\vec{u}$ est un vecteur donné. La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O un unique point M. On sait que $\vec{u}$ = $\overrightarrow{OM}$

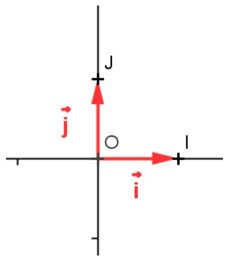


Dans un repère $(O\,;\,I\,,J)$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que
$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

Ci-contre le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3\,;\,-1)$

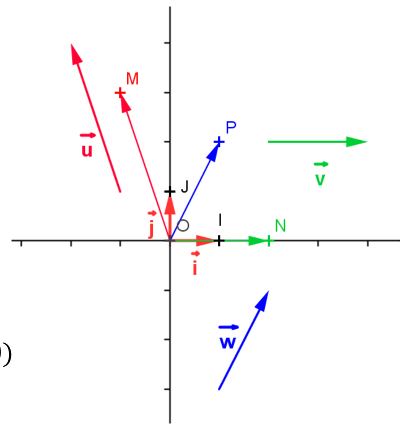
Autre notation d'un repère :

Bien souvent au lieu de noter $(O\,;\,I\,,J)$ **un repère , on le note $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ avec**
$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ **et** $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$



Exemple

Sur la figure ci-contre les vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont associés respectivement aux points M, N et P
donc $\vec{u}$ (−1 ; 3), $\vec{v}$ (2 ; 0) et $\vec{w}$ (1 ; 2)



Remarque : Le vecteur nul a pour coordonnées $(0\,;\,0)$

2) Propriété

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère
C'est à dire, dans un repère les vecteurs $\vec{u}$ $(x\,,\,y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,,\,y')$ sont égaux si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$

Démonstration

La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O, le point M.
La translation de vecteur $\vec{v}$ associe au point O, le point N.
On a $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, les points M et N sont confondus donc si, et seulement si, M et N ont les mêmes coordonnées.

II) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Propriété

Dans un repère, on considère les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

Démonstration

Dans un repère $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABMO$ et un parallélogramme, les segment $[OB]$ et $[AM]$ ont le même milieu K.
On a donc :

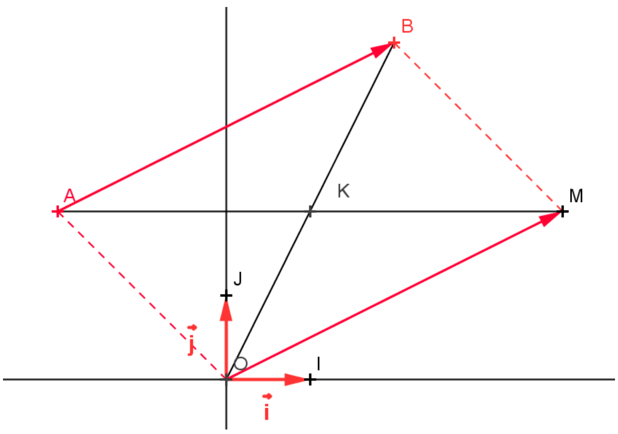
$x_K = \frac{x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_B}{2}$ mais on a aussi

$x_K = \frac{x_A + x_M}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_M}{2}$

On en déduit :

$x_M = 2\,x_K - x_A = 2\,\frac{x_B}{2} - x_A = x_B - x_A$

$y_M = 2\,y_K - y_A = 2\,\frac{y_B}{2} - y_A = y_B - y_A$



Or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M c'est à dire

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

Exemple

Si dans un repère, on donne les points $A(2\,;\,-3), B(1\,;\,5), C(1\,;\,4)$ et $D(0\,;\,-2)$
On a alors :
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(1 - 2\,;\,5 - (-3))$ d'où $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,8)$
$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;\,y_C - y_D)$ donc $\overrightarrow{DC}$ (1 – 0 ; 4 – (– 2)) d'où $\overrightarrow{DC}(1\,;\,6)$
$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;\,y_C - y_A)$ donc $\overrightarrow{AC}$ (1 – 2 ; 4 – (– 3)) d'où $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,7)$