Positions relatives de droites et de plans

I) Introduction

L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F. On note E∩F l'intersection de E et F.

On décrit ci-dessous les intersections de quelques sous-ensembles remarquables de l'espace affine euclidien usuel qui sont au programme de la classe de seconde.

On rappelle quelques définitions

Soit trois points A, B et C non confondus et non alignés.

- **La donnée des deux points A et B est équivalente à la donnée de l'unique droite, notée (AB), qui les contient tout les deux.**
- **La donnée des trois points A, B et C est équivalente à la donnée de l'unique plan, noté (ABC), qui les contient tout les trois.**

Les dessins.

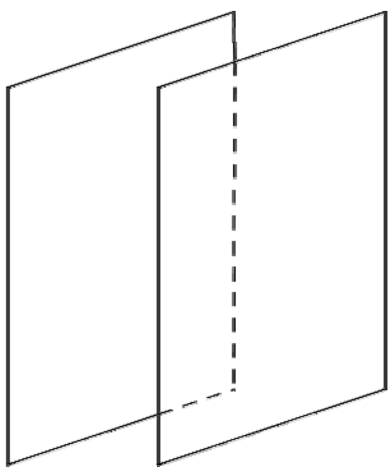
Ce sont des perspectives cavalières qui permettront de visualiser les situations. Attention ! Une réflexion est à faire concernant les conventions utilisées dans ces dessins afin de ne pas se fourvoyer dans de fausses interprétations.

II) Intersection de deux plans

Trois cas peuvent se présenter.

1) L'intersection est vide

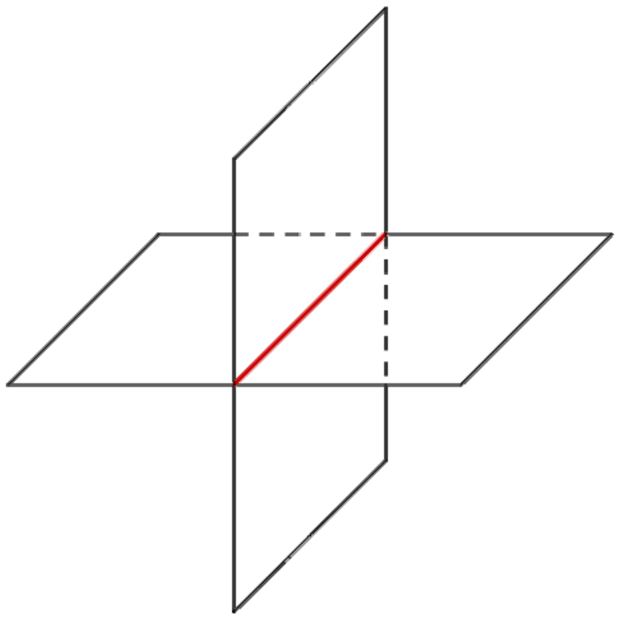
Dans ce cas, on dit que les plans sont parallèles.



2) L'intersection est un plan

C'est un cas particulier où les deux plans sont parallèles : ils sont confondus.

3) L'intersection est une droite



III) Intersection d'un plan et d'une droite

Il y a trois cas possibles

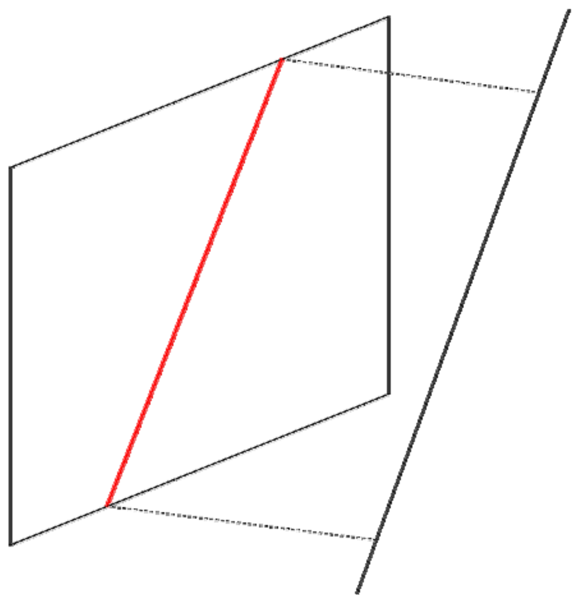
1) L'intersection est vide

Dans ce cas, on dit parfois, mais cet usage n'est pas universel, que le plan et la droite sont « faiblement parallèles ».

Il est plus important de retenir le théorème suivant, qui explique cette notion de faible parallélisme.

Théorème :

Soit P, un plan et D, une droite. On suppose que l'intersection de D et P est vide. Alors il existe un et un seul plan P', parallèle à P et contenant D.



Ici, la droite noire est faiblement parallèle au plan noir. La droite rouge, incluse dans le plan noir et parallèle à la droite noire, sert à faire visualiser le « faible parallélisme ».

2) L'intersection est une droite

Cela signifie que la droite est incluse dans le plan. C'est un cas particulier du « faible parallélisme » expliqué au paragraphe précédent. Le théorème, qui parlerait de plans confondus, serait alors beaucoup moins intéressant.

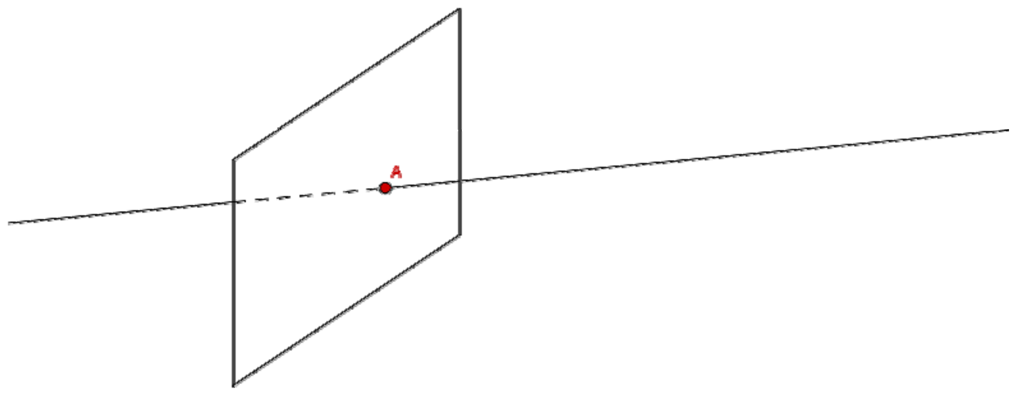
On voit la droite rouge ci-dessus, dans ce cas.

3) L'intersection est un point

On a dans ce cas le théorème suivant, important en pratique.

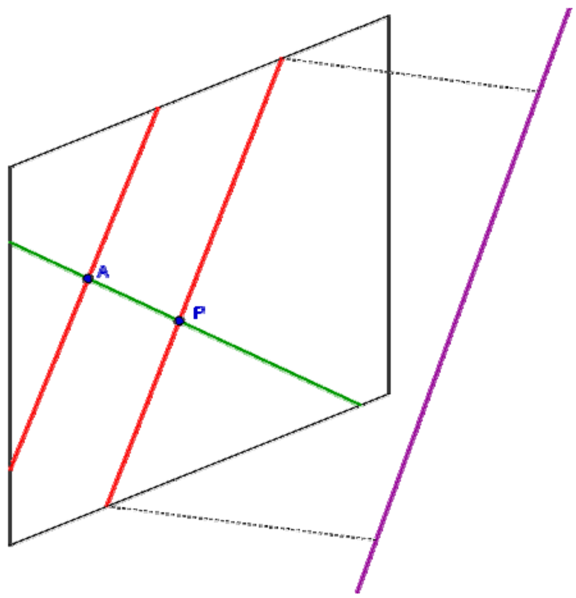
Théorème :

Soit P, un plan et D, une droite. On suppose que l'intersection de D et P contient un et un seul point A. Soit P', un plan quelconque, contenant D. Alors l'intersection de P et P' est une droite passant par A.



IV) Intersection de deux droites

Il y a quatre cas possibles.



1) L'intersection est vide et les deux droites sont parallèles

A ce cas est associé un théorème :

Théorème 1 :

Soit D et D', deux droites parallèles. Alors il existe un et un seul plan qui contient D et D'.

On dit que D et D' sont coplanaires.

C'est le cas des droites rouges et de la droite mauve ci-dessus. Elles sont toutes les trois parallèles. On a inclus les deux rouges dans un plan pour montrer le théorème qui dit que deux droites parallèles sont coplanaires.

Théorème 2 :

Soit D et D’, deux droites, P et P’, deux plans.

On suppose :

- **D et D’ sont parallèles ;**
- **P contient D et P’ contient D’ ;**
- **P et P’ se coupent en une droite Δ.**

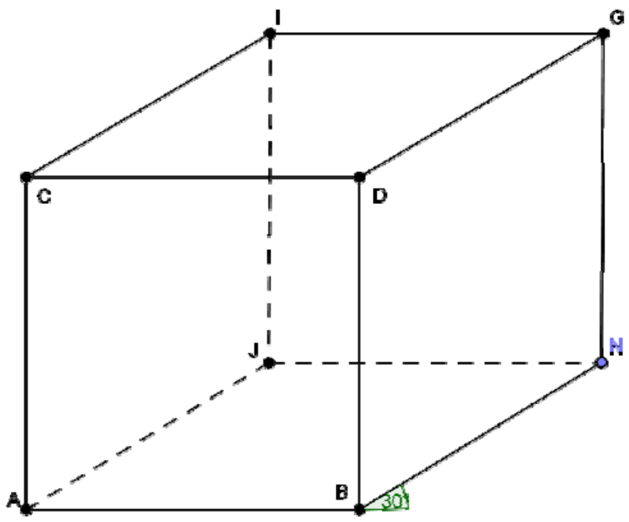
Alors :

Les droites D, D’ et Δ sont parallèles.

On appelle parfois ce théorème : théorème du toit. Imaginons que D et D, sont les gouttières qui longent le bas d’un toit, que P et P’ sont les deux pans du toit, et Δ représente le faîte du toit.

2) L’intersection est vide mais le droites ne sont pas parallèles

Ce cas est toujours surprenant car il est évidemment profondément différent des situations décrites en géométrie plane.
On peut aisément se convaincre de l’existence de ce cas en considérant le cube :



On comprend ici que les droites (BH) et (IJ) sont non sécantes et non parallèles.

Remarque. Les droites (IJ) et (HG) sont parallèles. La droite (BH) et la droite (HG) sont perpendiculaires. Dans ce cas de figure, on dit que les droites (IJ) et (BH) sont **orthogonales.**

Dans le dessin en début de paragraphe, la droite verte et la droite mauve sont non sécantes et non parallèles. Aucun plan ne peut les contenir toutes les deux.

Théorème :

Soit D et D' deux droites non sécantes. D et D' sont parallèles si et seulement si il existe un et un seul plan qui contient D et D'.

3) L'intersection est une droite

Dans ce cas , les deux droites sont confondues.

4) L'intersection est un point

Dans le dessin au début du paragraphe, ce cas correspond à la droite verte et à l'une des droites rouges. On a dessiné le plan noir afin d'illustrer le premier théorème ci-dessous.

On a dans ce cas deux théorèmes à retenir :

Théorème 1 :

Soit D et D’ deux droites dont l’intersection contient un et un seul point. Alors il existe un et un seul plan qui contient les droites D et D’.

On dit que les droites D et D’ sont coplanaires.

Théorème 2 :

Soit D et D’ deux droites non sécantes et non parallèles. Alors il existe une droite D’’, parallèle à D’, telle que l’intersection de D’’ et D soit réduite à un et un seul point.

La droite D’’ n’est pas unique. Une infinité de droites de ce type peut être exhibée. La réunion de toutes ce droites forme un plan faiblement parallèle à D’ et contenant D.

Dans le dessin en début de paragraphe, la droite verte et la droite mauve jouent respectivement le rôle de D et D’ dans ce théorème. Les droites rouges jouent le rôle de la droite D’’ dont on constate la non unicité.