Notion de vecteur – Vecteurs égaux

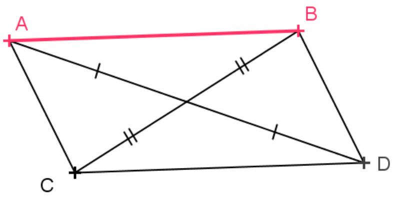
I) Translation

1) Définition

A et B sont deux points du plan.

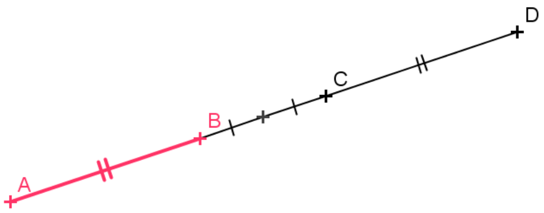
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan l'unique point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

1^er^Cas C $\notin$ (AB)



Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu

2^e^Cas C $\in$ [AB]

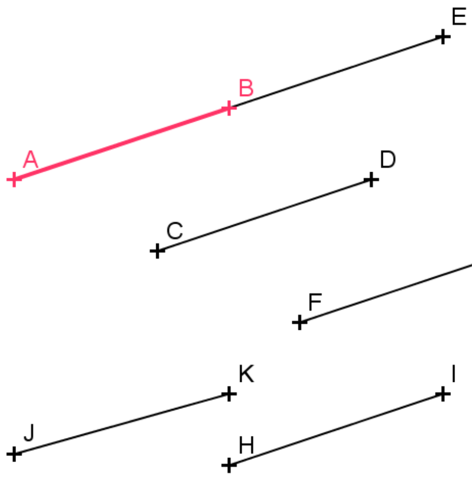


On dit que ABDC est un parallélogramme aplati.
Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu

<u>Remarque :</u> si A est confondu avec B, alors on associe au point C le point C lui même.

Exemple

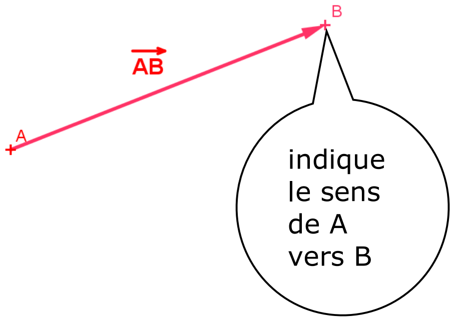
Sur la figure suivante



Les quadrilatères ABDC, ABKJ, ABGF, ABIH et ABEB sont des parallélogrammes (le dernier étant aplati). Donc la translation qui transforme A en B associe :
à C le point D | à H le point I | à F le point G
à J le point K | à B le point E

2) Définition

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



Ainsi on définit un nouvel objet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui a :
une direction celle de la droite (AB) ;
un sens, de A vers B
et une longueur ou norme, la longueur du segment [AB].

A est l'origine et B l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Remarque : Si A et B sont confondus alors le vecteur défini est le vecteur nul. Le vecteur nul noté $\vec{0}$ ne possède ni direction, ni sens et sa norme est nulle.

Exemples

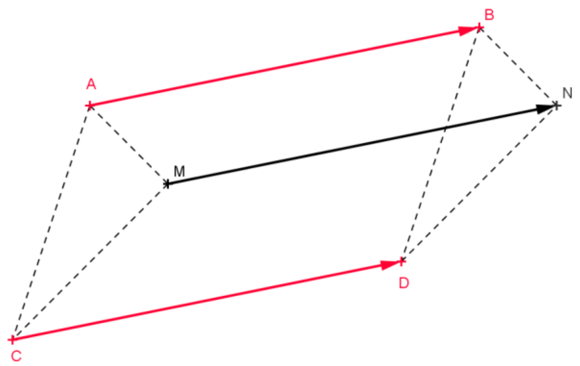
La translation qui transforme	est la translation de vecteur	le vecteur a pour direction	le vecteur a pour sens	le vecteur a pour longueur
C en D	$\overrightarrow{CD}$	celle de la droite (CD)	de C vers D	CD
E en H	$\overrightarrow{EH}$	celle de la droite (EH)	de E vers H	EH
B en A	$\overrightarrow{BA}$	celle de la droite (AB)	de B vers A	AB

II) Vecteurs égaux

On note D le point associé à C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Alors à tout point M, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ associent le même point N.

En effet, si ABDC et ABNM sont des parallélogrammes, il est aisé de montrer que CDNM est aussi un parallélogramme.



1) Définition

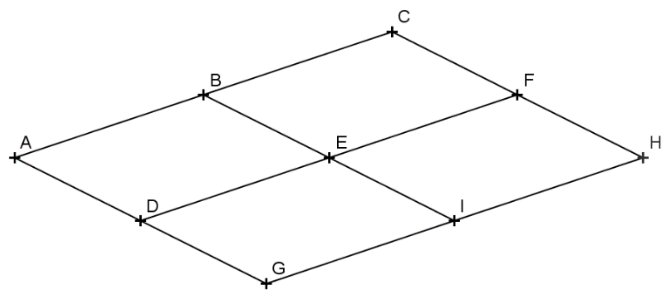
Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que la translation qui transforme A en B associe au point C le point D. On note $\overrightarrow{AB}= \overrightarrow{CD}$

2) Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati.

Exemple

Dans la figure ci-contre ABED, BCFE,DEJG et EFHI sont des parallélogrammes superposables. Les points A,B,C sont alignés ainsi que les points A,D,G.



Alors on a :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{IH}$

mais aussi

$\overrightarrow{AD} =\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{EI}= \overrightarrow{FH}$

mais encore

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CH}$ et

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH}$

et bien d'autres égalités ....

3) Conséquence

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement s'ils possèdent :

- **La même direction (c'est à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues)**
- **Le même sens**
- **La même longueur (AB = CD)**

4) Représentants d'un vecteur

a) Définition

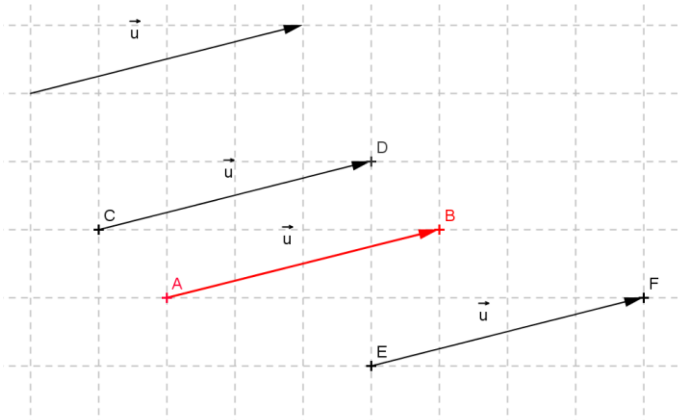
Etant donnés deux points A et B, on dit que le couple (M , N) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si ABNM est un parallélogramme.

En d'autres termes : le couple (M,N) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Par exemple, le couple de points (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme aussi C en D et E en F donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

On dit que (A,B), (C,D) et (E,F) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur.

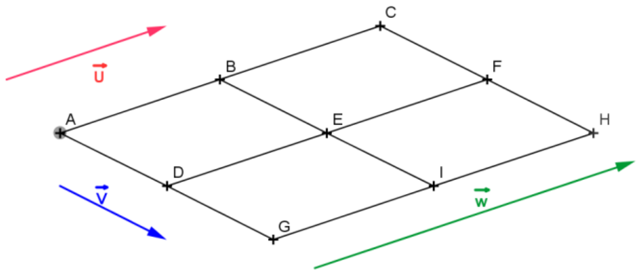


b) Remarque

On rencontrera dans de nombreux exercices des vecteurs désignés par une seule lettre, $\vec{u}$ par exemple. La possibilité d'utiliser une telle écriture provient du fait que la notion de vecteur est fondamentalement différente de celle de position. En effet, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est indépendants des points A et B en ce sens qu'au lieu des points A et B, on aurait pu, pour définir ce vecteur, utiliser n'importe quels points M et N situés ailleurs dans le plan, avec comme seule contrainte le fait que ABNM soit un parallélogramme.

Exemple

Dans la figure ci-contre ABED, BCFE, DEJG et EFHI sont des parallélogrammes superposables. Les points A,B,C sont alignés ainsi que les points A,D,G.



Alors:

$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IH}$ sont des vecteurs égaux auvecteur $\vec{u}$

Les couples de points (A,B), (D,E), etc… sont des représentants du vecteur $\vec{u}$

et

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DG}$,$\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FH}$sont des vecteurs égaux au vecteur $\vec{v}$

Les couples de points (A, D), (B , E), (C , F) , (D , G) , (E , I) et (F, H) sont des représentants du vecteur $\vec{v}$

et aussi

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{GH}$sont des vecteurs égaux au vecteur $\vec{w}$

Les couples de points (A, C), (D , F) , (D , G) et (G , H) sont des représentants du vecteur $\vec{w}$

5) Vecteurs particuliers

- **Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est associé à la translation qui transforme A en A, B en B, C en C, ….**
  ainsi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \ldots = \vec{0}$

- **Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A, c'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$**

Exemple :

Dans la figure de l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont opposés, ainsi que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}$ (on pourrait trouver de nombreux couples de vecteurs opposés).