Représentation plane de la géométrie dans l'espace : la perspective cavalière

I) Principes généraux

a) Objectifs

Le but d'une perspective cavalière est de représenter sur une feuille ou sur un tableau, donc sur un objet plan, un objet qui, dans la réalité, occupe trois dimensions : hauteur, largeur et profondeur

Fondamentalement, un tel dessin n'est possible qu'en acceptant des règles de construction et de lecture d'un dessin, étant entendu qu'une telle représentation, puisqu'elle est inexacte, fait appel à nos impressions et à des conventions.

Imaginons qu'un cube soit fabriqué en carton, comme un carton d'emballage. Il est évident que la face qui se trouve devant nos yeux cache celles qui sont derrière.
Imaginons qu'un cube soit en verre, comme un aquarium. Alors, au contraire du cas précédent, chaque partie de l'objet peut être vue sans tourner autour.

b) Pointillés

Pour dessiner une perspective cavalière, on s'inspire de ces deux exemples. Ce qui est vu de l'objet sans tourner autour de lui et quel que soit le matériau dont il est constitué sera dessiné en traits pleins, c'est-à-dire sans lever le crayon. **En revanche, les parties qui ne seraient vues que si le matériau était transparent est dessiné en traits pointillés.**
On ne représente que les arêtes d'un objet, les surfaces lisses ne sont en général pas dessinées. On peut parfois, c'est le cas des logiciels de géométrie, les colorier.

c) Angles

Si l'on regarde un cube bien en face, on ne verra qu'un carré, les cinq autres faces étant cachées. En revanche, si l'on tourne un petit peu autour du cube, on verra apparaître une ou deux autres faces, le côté droit et le dessus, par exemple.

La perspective cavalière fait une sorte de compromis entre deux situations. Celle où l'on est de face, et, pour représenter un cube, on choisira de dessiner le carré vu de face sans aucune déformation, et celle où l'on regarde l'objet de côté et de dessus.

Pour représenter un cube, on dessinera donc aussi les faces de côté et de dessus et de dessous, mais celles-ci seront déformées, selon le principe suivant :

Tout objet appartenant au plan qui nous fait face doit être dessiné en vraie grandeur.

Tout segment inclus dans une droite perpendiculaire au plan qui nous fait face (profondeur) sera dessinée avec un angle α avec l'horizontale et sera raccourcie de sa longueur vraie L à une longueur apparente L' selon la formule suivante :

$$\boxed{L' = L\cos\alpha}$$

On met en œuvre dans les dessins ci-dessous l'ensemble de ces principes

II) Mise en oeuvre

a) Choix de l'angle

En pratique, l'angle α ne peut pas être nul, plat ou droit. Si $\alpha = 45°$, pour le cube, la représentation est maladroite car les lignes qui sont en profondeur se confondent avec les diagonales de certaines faces. Le même problème peut se poser avec d'autres valeurs de α et certains parallélépipèdes.

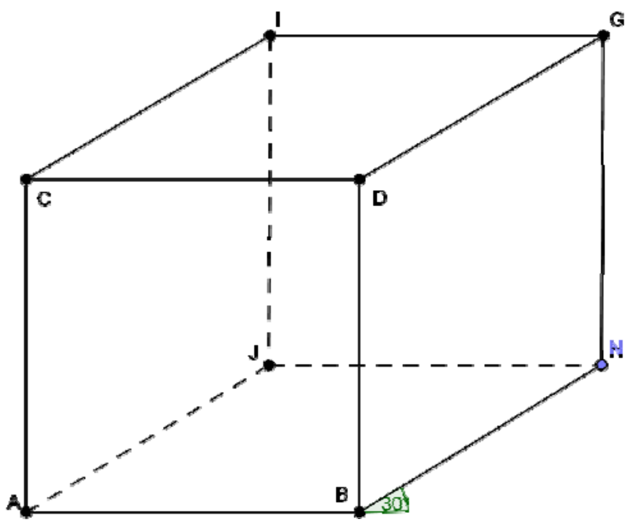
Il faut donc réfléchir à l'angle choisi avant de dessiner.

On rappelle :

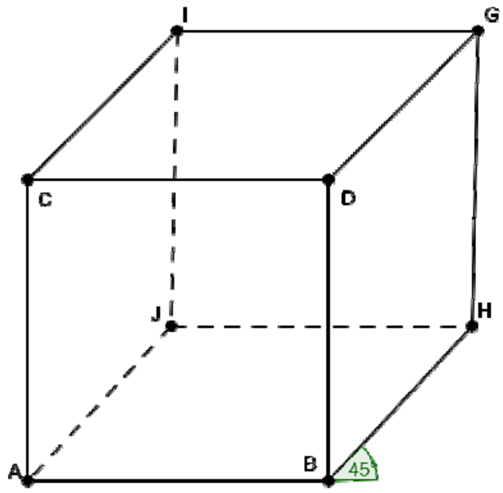
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,85 \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} = 0,5$$

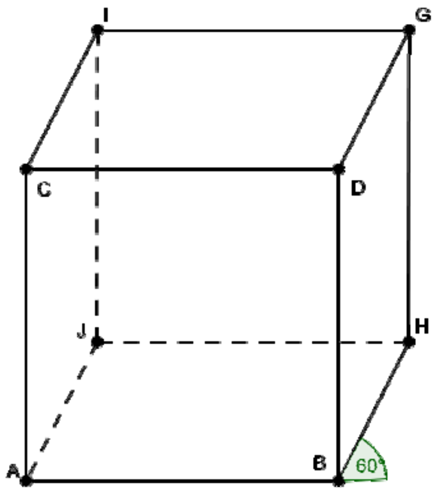
Bien sûr, d'autres angles peuvent être utilisés, comme un angle à 40°, susceptible d'éviter les chevauchements, comme dans le cube à 45° et pour la pyramide incluse dans un cube à 60°.

b) Trois représentations du cube



On observe dans le dessin ci-dessous l'alignement illusoire des points A, J,D,G.



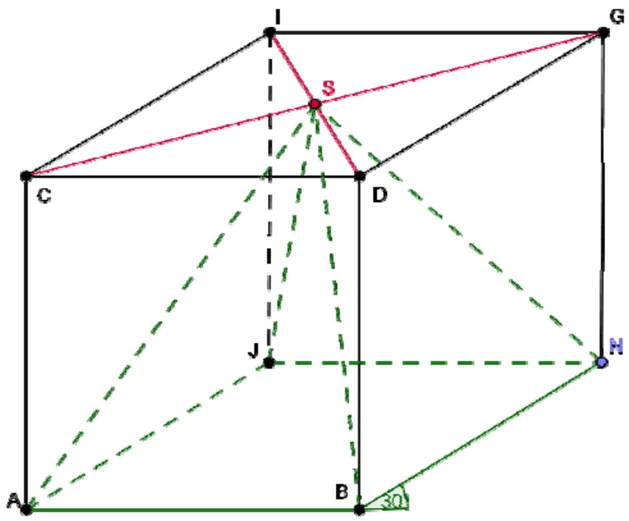


III) Exemple d'une construction plus complexe

On construit maintenant une pyramide régulière à base carré.
Pour ce faire, le plus simple est d'inscrire cette figure dans un parallélépipède rectangle – ici un cube- de la hauteur requise, d'y dessiner la pyramide dont le sommet est le centre de la face supérieure. Puis de gommer le cube.

1) La pyramide incluse dans le cube qui lui sert d' « échafaudage »

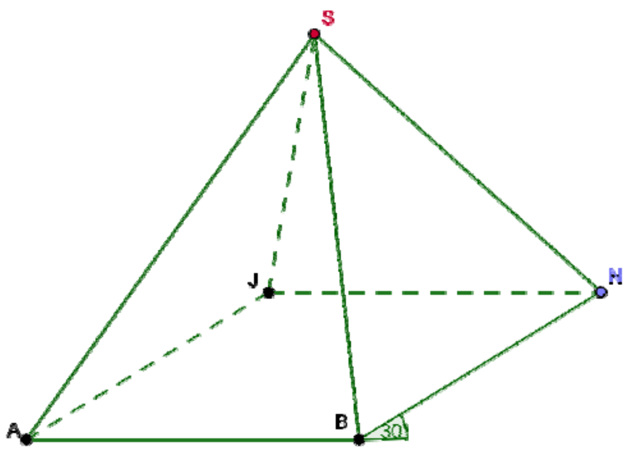
On choisit ici un angle $\alpha = 30°$. Il est intéressant de noter qu'avec l'angle $\alpha = 60°$, les arêtes de la pyramide et les profondeurs du cube se confondent.



On a tracé les diagonales de la face supérieure pour en déterminer le centre S qui est aussi le sommet de la pyramide.
La base de la pyramide étant le carré ABHJ, on a ensuite tracé les segments [AS], [BS], [HS] et [JS] qui sont à l'intérieur du cube donc non visibles, donc en pointillés.
On a mis en vert les arêtes de la pyramide.

2) La pyramide finale

On efface enfin les traits de construction, c'est-à-dire tout ce qui n'est pas vert, hormis le sommet S. On laisse en pointillés ce que la pyramide cache d'elle-même, et en traits pleins ce qui est vu après suppression du cube.



On note L la longueur du côté de la base carrée de la pyramide. Notons S', le centre de la face carrée AJHB. S' est aussi le projeté orthogonal de S sur la face carrée de la pyramide et le milieu de [AH].
D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABH, on a :

$$AH^2 = AB^2 + BH^2 = 2L^2$$

On a donc :

$$AH = L\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad AS' = L\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ASS', on a :

$$AS^2 = AS'^2 + SS'^2$$

On a donc :

$$AS^2 = \frac{L^2}{2} + L^2 = \frac{3L^2}{2} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{AS = \frac{L\sqrt{6}}{2}}$$

Remarquons que les quatre arêtes non incluses dans la base carrées sont réellement de mêmes longueurs, mais que sur le dessin, il n'y en a pas deux identiques.