Fonction carré et inéquations

1) Inéquations du type $x^2 \leq a$ ou $x^2 < a$

Méthode / Explications :

• Si a <0 alors les équations $x^2 \leq a$ et $x^2 < a$ n'ont pas de solution (un carré ne peut être négatif)

• Si a = 0, alors l'équation $x^2 \leq 0$ n'a qu'une seule solution qui est 0 et $x^2 < 0$ n'a pas de solution pour les mêmes raisons que précédemment.

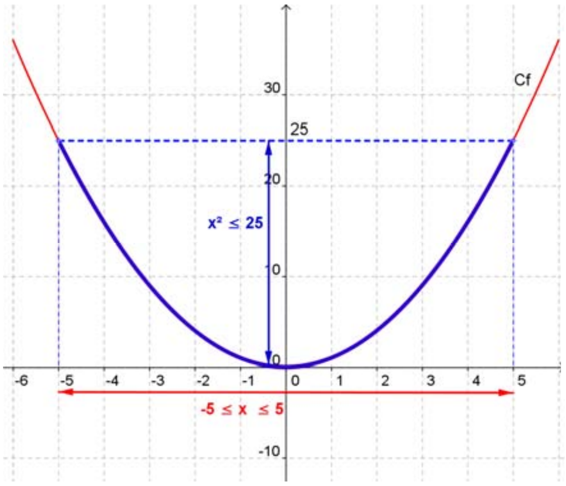
• Si a >0 on peut facilement voir, en s'aidant du graphique de la fonction carré que :

$x^2 \leq a$ équivaut à $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

$x^2 < a$ équivaut à $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $x^2 \leq 25$

Réponse :



$x^2 \leq 25$

équivaut à :

$-\sqrt{25} \leq x \leq \sqrt{25}$

ce qui équivaut à :

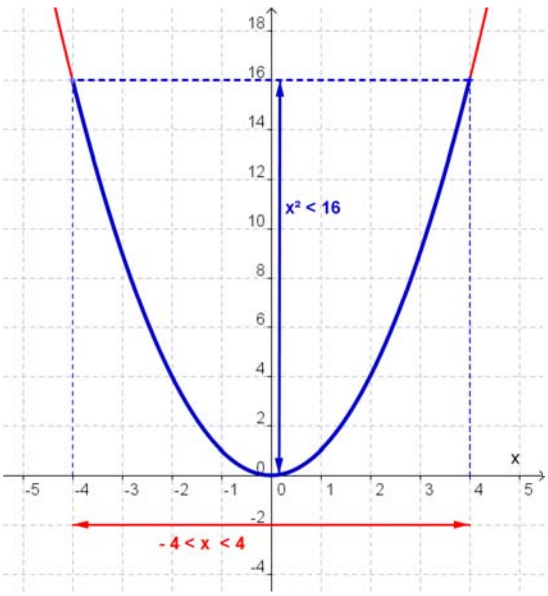
$-5 \leq x \leq 5$

L'ensemble des solutions est donc

S = [-5 ; 5]

Exercice 2 : Résoudre l'inéquation $x^2 < 16$

Réponse :



$x^2 < 16$

équivaut à :

$-\sqrt{16} < x < \sqrt{16}$

ce qui équivaut à :

$-4 < x < 4$

L'ensemble des solutions est donc :

S =]-4 ; 4[

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation $(x-2)^2 \leq 9$

Réponse :

$(x-2)^2 \leq 9$ **alors :**

$-\sqrt{9} \leq (x-2) \leq \sqrt{9}$

ce qui équivaut à :

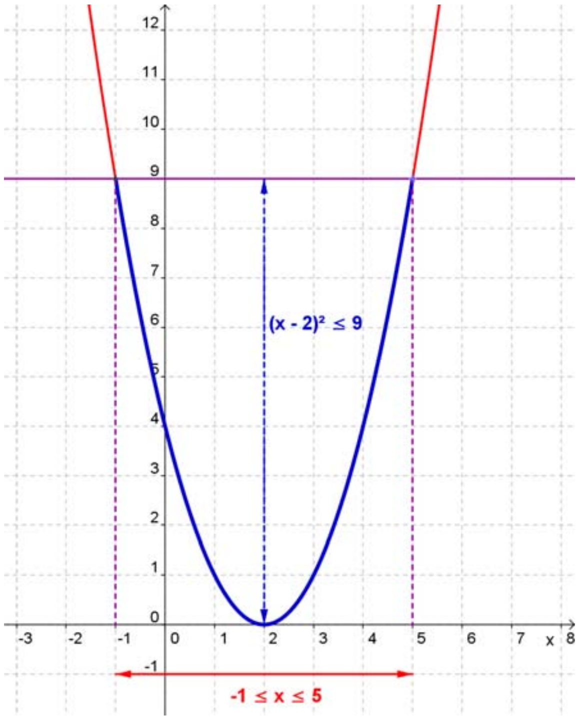
$-3 \leq x-2 \leq 3$

on obtient:

$-3+2 \leq x \leq 3+2$

C'est-à-dire :

$-1 \leq x \leq 5$



L'ensemble des solutions est donc : S = [-1 ; 5]

Exercice 4 : Résoudre l'inéquation $(3x-1)^2 \leq \frac{1}{4}$

Réponse :

$(3x-1)^2 \leq \frac{1}{4}$ **alors :**

$-\sqrt{\frac{1}{4}} \leq (3x-1) \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$

ce qui équivaut à :

$-\frac{1}{2} \leq 3x-1 \leq \frac{1}{2}$

on obtient:

$-\frac{1}{2}+1 \leq 3x \leq \frac{1}{2}+1$

C'est-à-dire :

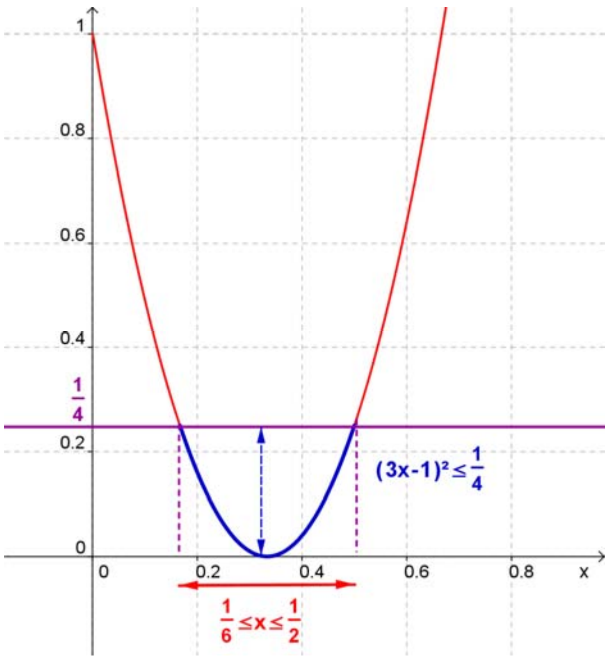
$\frac{1}{2} \leq 3x \leq \frac{3}{2}$

Ce qui équivaut à :

$\frac{1}{2\times 3} \leq x \leq \frac{3}{2\times 3}$

On obtient finalement :

$\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{6}$



L'ensemble des solutions est donc : $S = \left[\frac{1}{6} ; \frac{3}{6}\right]$ **ou** $S = \left[\frac{1}{6} ; \frac{1}{2}\right]$

2) Inéquations du type $x^2 \geq a$ ou $x^2 > a$

Méthode / Explications :

• Si a <0 alors les équations $x^2 \geq a$ et $x^2 > a$ ont pour solution $\mathbb{R}$
(^{2} étant toujours supérieur à un nombre négatif)

• Si a = 0, alors l'équation $x^2 \geq 0$ a aussi pour solution $\mathbb{R}$, (puisqu'un carré est toujours supérieur ou égal à 0) et $x^2 > 0$ a pour solution $\mathbb{R} / \{0\}$

• Si a >0 on peut facilement voir, en s'aidant du graphique de la fonction carré que :

$x^2 \geq a$ équivaut à :

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x \leq -\sqrt{a} \end{cases}$$

$x^2 > a$ équivaut à :

$$\begin{cases} x > \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$$

Exercice 1 : Résoudre l'inéquation $x^2 \geq 9$

Réponse :

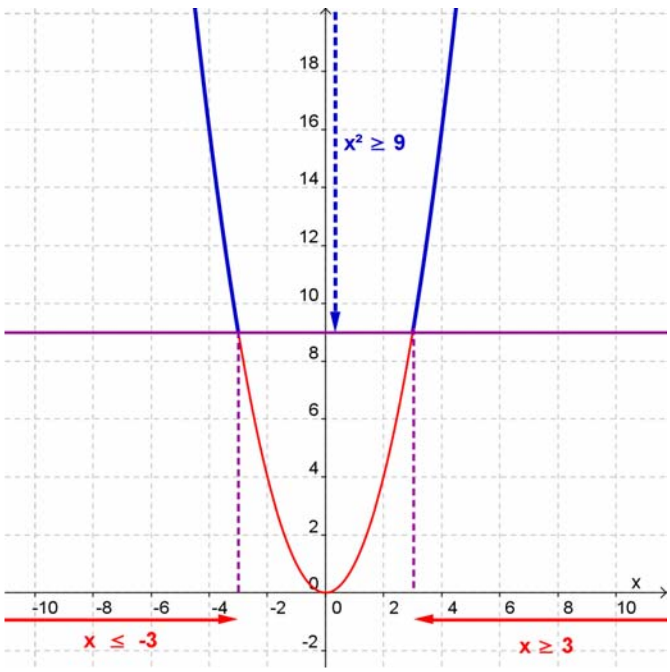
$x^2 \geq 9$ équivaut à :

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{9} \\ \text{ou} \\ x \leq -\sqrt{9} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ou} \\ x \leq -3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc : S =]$-\infty$; -3] ∪ [3 ; $+\infty$[



Exercice 2 : Résoudre l'inéquation $x^2 < 8$

Réponse :

$x^2 > 8$

équivaut à :

$\begin{cases} x > \sqrt{8} \\ \text{ou} \\ x < -\sqrt{8} \end{cases}$

C'est-à-dire :

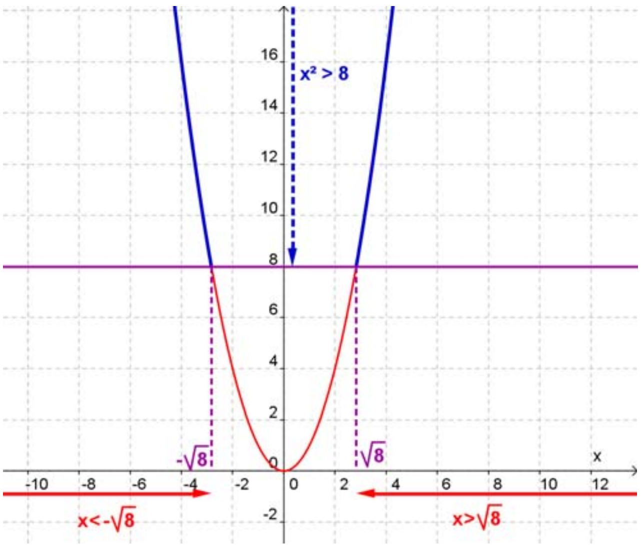
$\begin{cases} x > 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x < -2\sqrt{2} \end{cases}$

Remarque : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$

L'ensemble des solutions est donc :

S = $]-\infty\,;\,-2\sqrt{2}\,[\ \cup\ ]\,2\sqrt{2}\,;\,+\infty[$ ou

S = $]-\infty\,;\,-\sqrt{8}\,[\ \cup\ ]\,\sqrt{8}\,;\,+\infty[$



Exercice 3 : Résoudre l'inéquation $(x-2)^2 \geq 9$

Réponse :

$(x-2)^2 \geq 9$

équivaut à :

$\begin{cases} x - 2 \geq \sqrt{9} \\ \text{ou} \\ x \leq -\sqrt{9} \end{cases}$

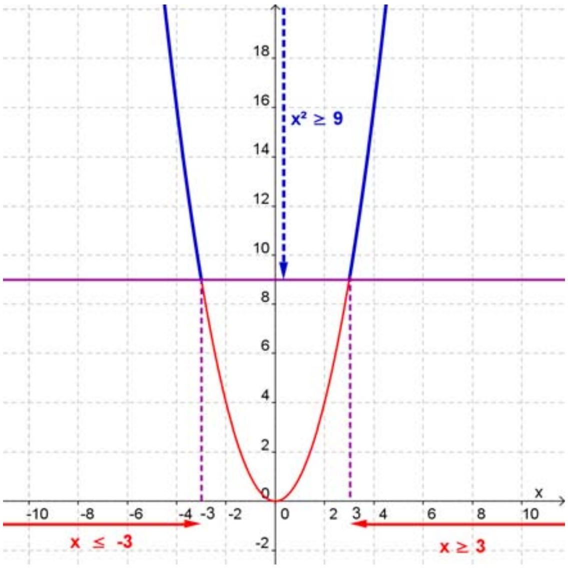
C'est-à-dire :

$\begin{cases} x - 2 \geq 3 \\ \text{ou} \\ x - 2 \leq -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 3 + 2 \\ \text{ou} \\ x \leq -3 + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 5 \\ \text{ou} \\ x \leq -1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est donc : S = $]-\infty\,;\,-1\,]\ \cup\ [\,5\,;\,+\infty[$



Exercice 4 : Résoudre l’inéquation $(3x-1)^2 > \frac{1}{4}$

Réponse :

$(3x-1)^2 > \frac{1}{4}$

équivaut à :

$$\begin{cases} 3x-1 > \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \text{ou} \\ 3x-1 < -\sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 3x-1 > \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ 3x-1 < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > \frac{1}{2} +1 \\ \text{ou} \\ 3x < -\frac{1}{2} +1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ 3x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x < \frac{1}{6} \end{cases}$$

L’ensemble des solutions est donc : S = $]-\infty\,;\,\frac{1}{6}[\ \cup\ ]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$