Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - ▌Méthodes et/ou Explications ▌ Réponses

Fonction inverse et inéquation

Méthode \ Explications :

On rappelle que :

- **Si 0 <a $\leq$ b alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (c'est à dire $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur]0 ; $+\infty$[ )**
- **Si a $\leq$ b < 0, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (c'est à dire $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur]$-\infty$; 0[)**

Pour résoudre les inéquations $\frac{1}{x} \leq k$ et $\frac{1}{x} \geq k$ il y a 2 cas faciles et 2 cas difficiles

1) cas faciles

Exercice 1 :.Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq 2$

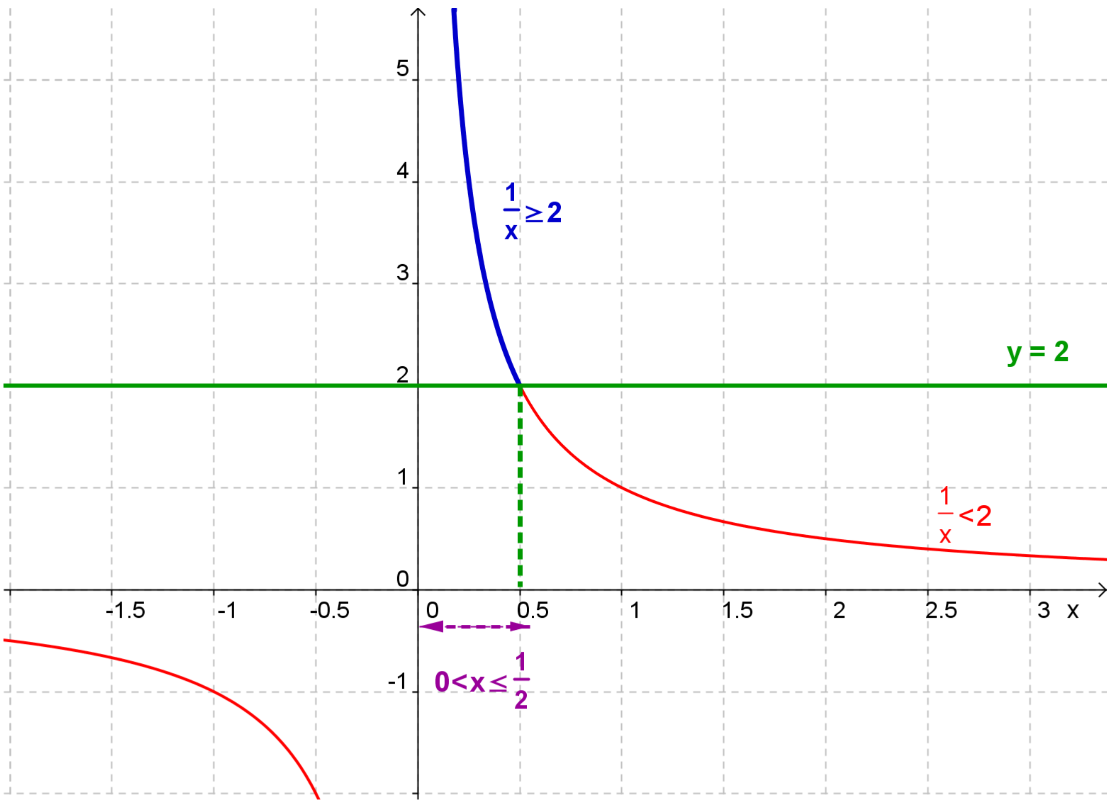
Réponse :

Nous sommes dans le cas où $\frac{1}{x}$ est positif, donc $x >$ 0 .

f est décroissante sur l'intervalle] 0 ; $+\infty$[, donc :

Pour $\frac{1}{x} \geq$ 2 alors $x \leq \frac{1}{2}$. Mais attention x reste positif !!!!

L'inéquation $\frac{1}{x} \geq$ 2 a pour solution : S =]0 ; $\frac{1}{2}$.]



Exercice 2 : Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \leq -3$

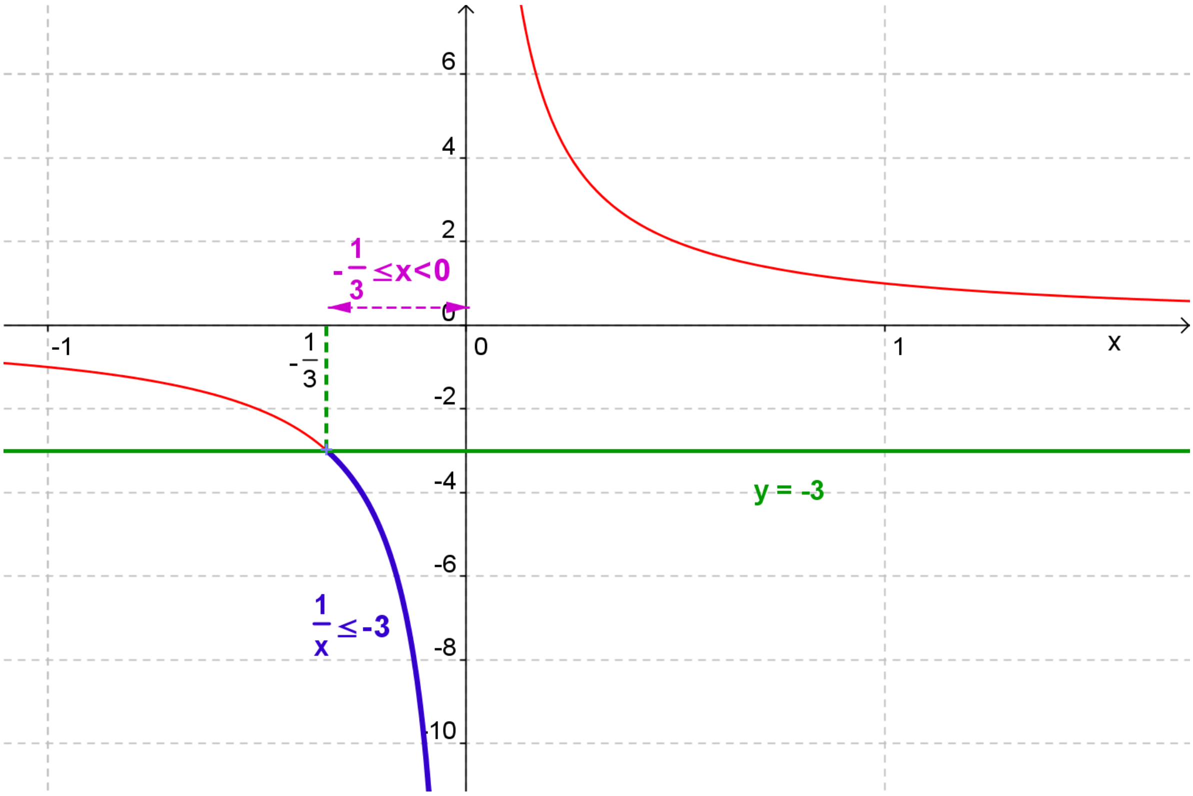
Réponse :

Nous sommes dans le cas où $\frac{1}{x}$ est négatif, donc $x < 0$.

f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0[$, donc :

Pour $\frac{1}{x} \leq -3$ alors $x \geq -\frac{1}{3}$. Mais attention x reste négatif !!!!

L'inéquation $\frac{1}{x} \leq -3$ a pour solution : S = $[-\frac{1}{3} ; 0[$



2) cas difficiles

Exercice 3 :.Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$

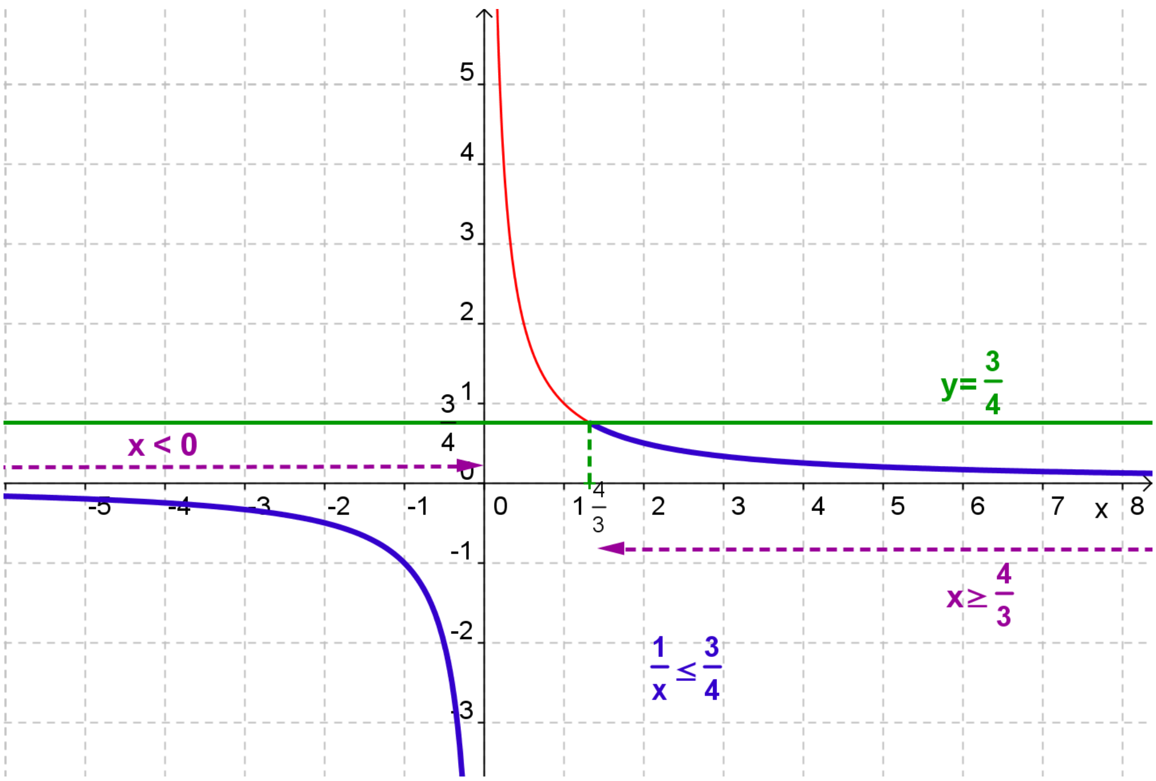
Réponse :

Nous ne pouvons pas directement conclure nous devons séparer le cas où $\frac{1}{x}$ est positif et le cas où $\frac{1}{x}$ est négatif : C'est-à-dire où x est positif et x négatif

•Lorsque $\frac{1}{x} > 0$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$, cela équivaut à $x \geq \frac{4}{3}$ donc l'ensemble des solutions est [$\frac{4}{3}$; +∞ [

•Lorsque $\frac{1}{x} < 0$, pour n'importe quelle valeur de x : $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$ .L'ensemble des solutions est donc]-∞ ; 0[

Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est S =]-∞ ; 0[∪ [$\frac{4}{3}$; +∞[



Exercice 3 :.Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

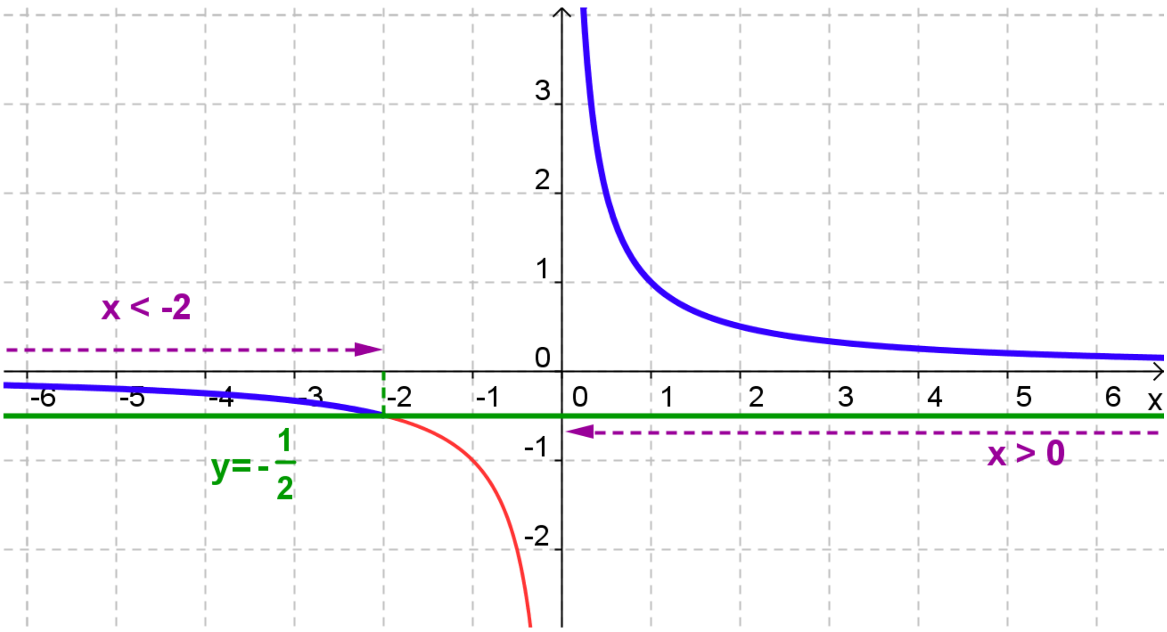
Réponse :

Nous ne pouvons pas directement conclure nous devons séparer le cas où $\frac{1}{x}$ est positif et le cas où $\frac{1}{x}$ est négatif : C'est-à-dire où x est positif et x négatif

•Lorsque $\frac{1}{x}$ >0, pour n'importe quelle valeur de x : $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$ l'ensemble des solutions est donc] 0; +∞ [

•Lorsque $\frac{1}{x} < 0$ et $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$, cela équivaut à $x < -2$ donc l'ensemble des solutions est]$-\infty$; -2 [

Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est
S =] 0; +∞ [∪]$-\infty$; -2 [



3) Exercices supplémentaires

Exercice 4:. Résoudre l'inéquation $2 \leq \frac{1}{x} \leq 5$

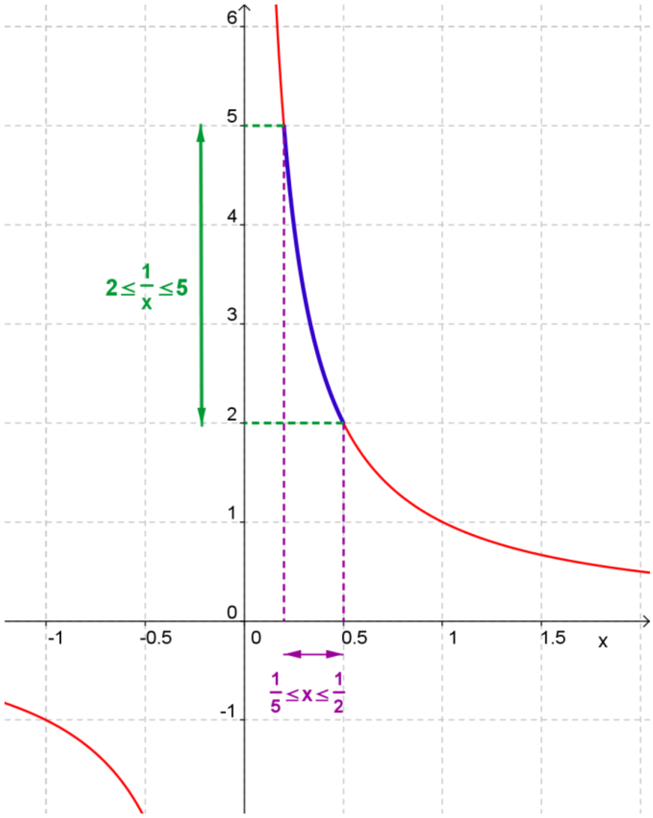
Réponse : Nous sommes dans le cas où $\frac{1}{x}$ reste positif. Donc x l'est aussi

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante pour x > 0.

On obtient donc : $\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{5}$, c'est-à-dire : $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Lorsque: $2 \leq \frac{1}{x} \leq 5$ alors $x \in [\frac{1}{5} ; \frac{1}{2}]$.

S = [$\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$].



Exercice 5:.Résoudre l'inéquation$-4 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$

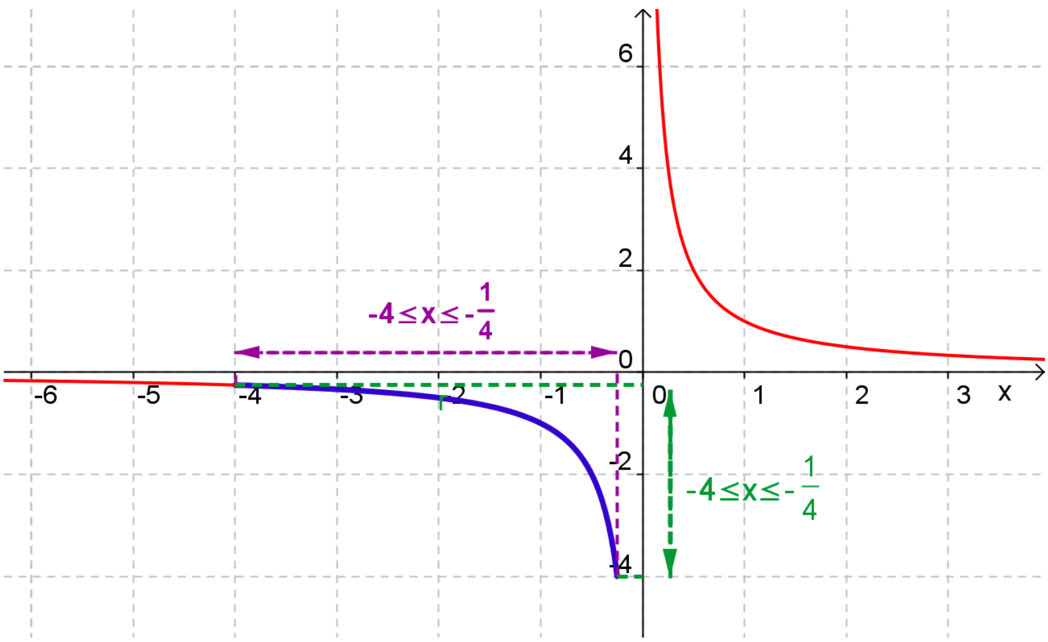
Réponse : Nous sommes dans le cas où $\frac{1}{x}$ reste négatif. Donc x l'est aussi.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc décroissante pour $x < 0$.

On obtient donc : $-\frac{1}{4} \geq x \geq -\frac{4}{1}$, c'est-à-dire : $-4 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

Lorsque: $-4 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$ alors $x \in [\,-4\,;\,-\,-\frac{1}{4}\,]$.

S = $[\,-4\,;\,-\frac{1}{4}]$.



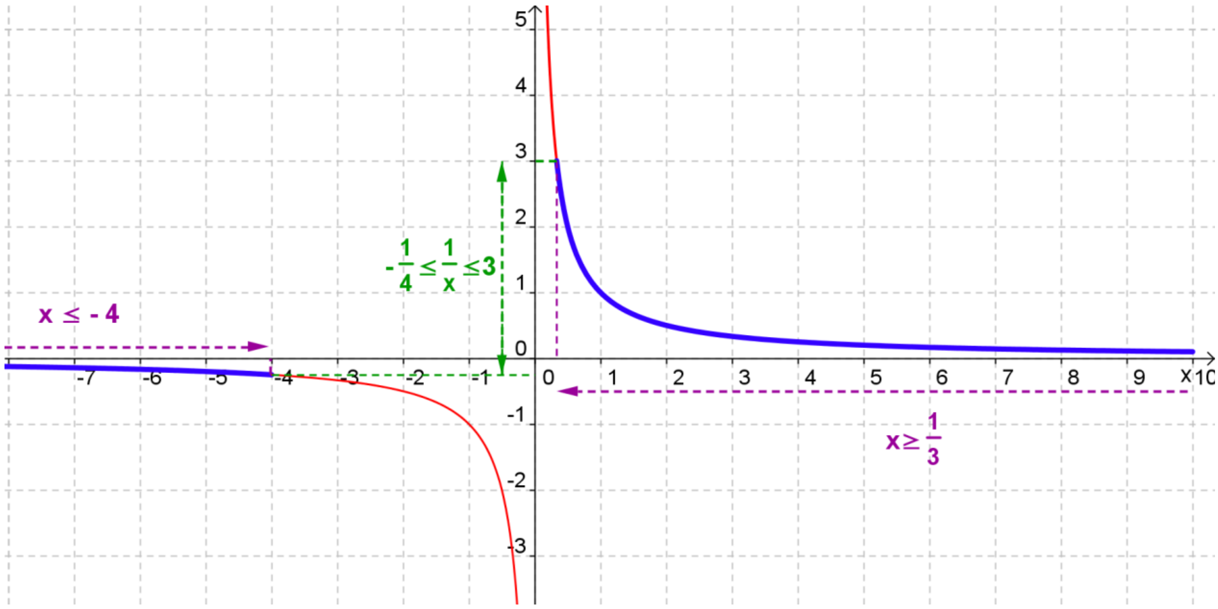
Exercice 6:.Résoudre l'inéquation $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 3$

Réponse :

Nous ne pouvons pas conclure directement .Nous devons séparer le cas où $\frac{1}{x}$ est positif et le cas où $\frac{1}{x}$ est négatif : C'est-à-dire où x est positif et x négatif

Méthode 1 : Nous allons répondre à cette question par lecture graphique :

Il est important de savoir maitriser la méthode graphique, pour ce type d'exercices:



Solution :

Lorsque $\frac{1}{x} \in [-\frac{1}{4} ; 3]$, nous voyons sur le graphique que :

$x \in [-\infty ; -4] \cup [\frac{1}{3} ; +\infty[$. **Donc S =** $[-\infty ; -4] \cup [\frac{1}{3} ; +\infty[$

Méthode 2 (assez difficile : Méthode algébrique) :
Pour ceux qui voudraient aller en section scientifique, ils doivent savoir faire la méthode algébrique) :
Nous ne pouvons pas conclure directement .Nous devons séparer le cas où $\frac{1}{x}$ est positif et le cas où $\frac{1}{x}$ est négatif : C'est-à-dire où x est positif et x négatif

Cet encadrement équivaut à :

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} < 0 \\ \text{et} \\ 0 < \frac{1}{x} \leq 3 \end{cases} \quad \textbf{Ce qui équivaut à :} \quad \begin{cases} x \leq -4 \\ \text{et} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $x \in]-\infty ; -4] \cup [\frac{1}{3} ; +\infty[$