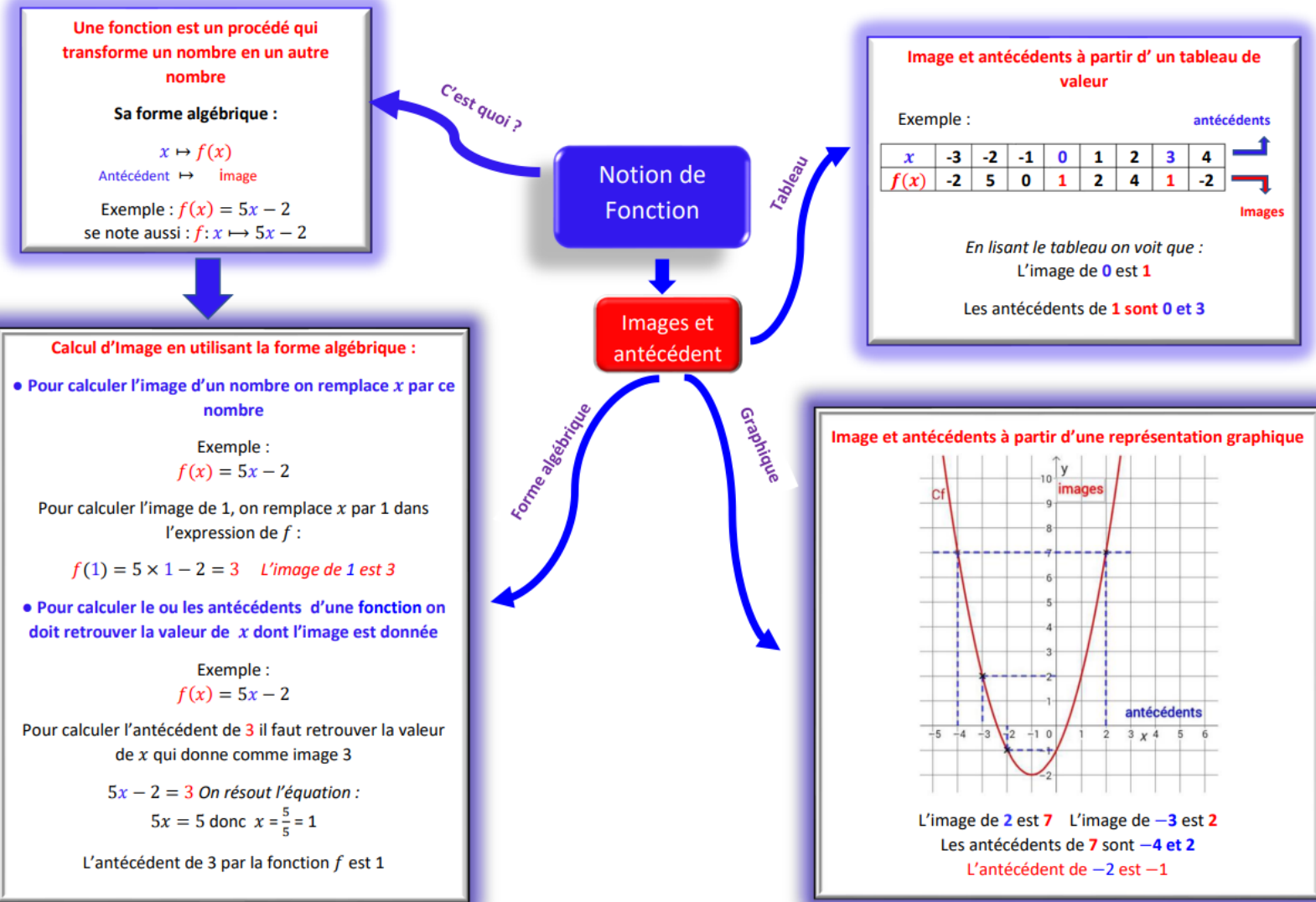


Fonctions généralités

I) Notion de fonction

1) Définitions et notations



Remarque : Un nombre possède une unique image mais un nombre peut avoir plusieurs antécédents.

2) Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs qui permettent d'obtenir une image.

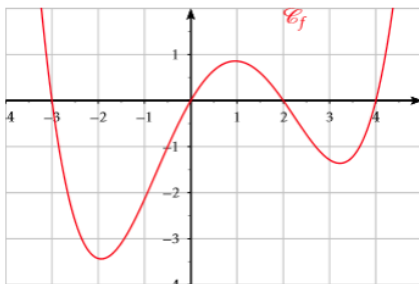
Exemples :

La fonction $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ est définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucune valeur interdite, donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ a une valeur interdite 0. On ne peut pas diviser par 0 donc le domaine de définition de cette fonction est $Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La fonction $f(x) = \frac{7+x}{x-2}$ a une valeur interdite 2. On ne peut pas diviser par 0, donc $x - 2 \neq 0$ donc $x \neq 2$, donc le domaine de définition de cette fonction est $Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

3) Courbe représentative



**L'ensemble des points de coordonnées $M(x; f(x))$ est appelée courbe représentative d'une fonction f .
 x s'appelle l'antécédent
 $f(x)$ s'appelle l'image**

II) Résolution graphique d'équations et inéquations

1) Equations.

Soit f une fonction définie sur un domaine I inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit k , un nombre réel.

On suppose qu'on doit résoudre une équation du type $f(x) = k$.

Principe :

On suppose qu'on dispose de la courbe représentative de la fonction f . Résoudre l'équation $f(x) = k$, c'est trouver les antécédents par f du nombre k .

Or, sur la courbe représentative de f , les valeurs obtenues par f , autrement dit, les images par f , sont repérées sur l'axe des ordonnées.

Il faut donc tout d'abord repérer la valeur k sur l'axe des ordonnées.

Ensuite, il faut connaître les points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est k .

Il faut donc tracer la droite d'équation $y = k$ (c'est aussi la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; k)$) et marquer les points d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de f . L'abscisse de chacun du ou des points est solution de l'équation $f(x) = k$

Attention ! Il se peut qu'il y ait un ou plusieurs point(s) obtenu(s). Il se peut aussi qu'il n'y en ait aucun.

• Si la droite d'équation $y = k$ ne coupe pas la courbe représentative de f , cela veut dire que l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution et le travail est terminé.

• Le(s) point(s) obtenu(s) ont des coordonnées du type $(x; f(x))$

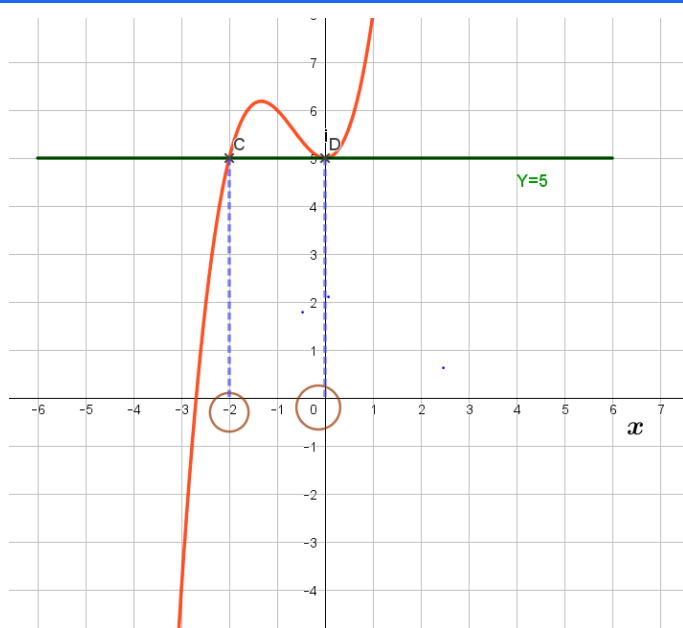
Il suffit donc de lire, sur le graphique, la ou les abscisse(s) de ce(s) point(s) d'intersection. Ce sont les solutions de l'équation.

Exemples : On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$



a. Résoudre graphiquement l'équation

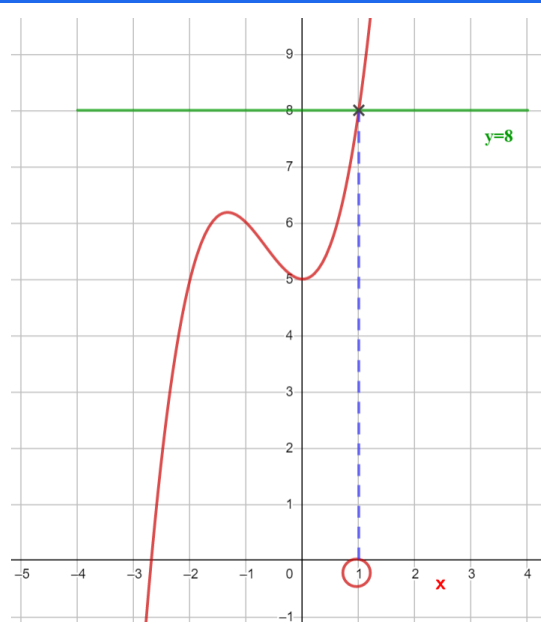
$$x^3 + 2x^2 + 5 = 5$$



Graphiquement les solutions de l'équation $x^3 + 2x^2 + 5 = 5$ sont environ : **-2 et 0**

b. Résoudre graphiquement l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 5 = 8$$



Graphiquement la solution de l'équation $x^3 + 2x^2 + 5 = 8$ est environ : **1**

2) inéquations.

Soit f une fonction définie sur un domaine I inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit k , un nombre réel.

Principe pour résoudre une équation du type $f(x) > k$; $f(x) < k$; $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$:

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ sur un intervalle I revient à trouver tous les points de la courbe représentative de la fonction f dont l'ordonnée est inférieure à k .

Pour cela, on trace la droite d'équation $y = k$ (c'est aussi la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; k)$).

On cherche tous les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que k .

De même résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > k$ sur un intervalle I revient à trouver tous les points de la courbe représentative de la fonction f dont l'ordonnée est supérieure à k .

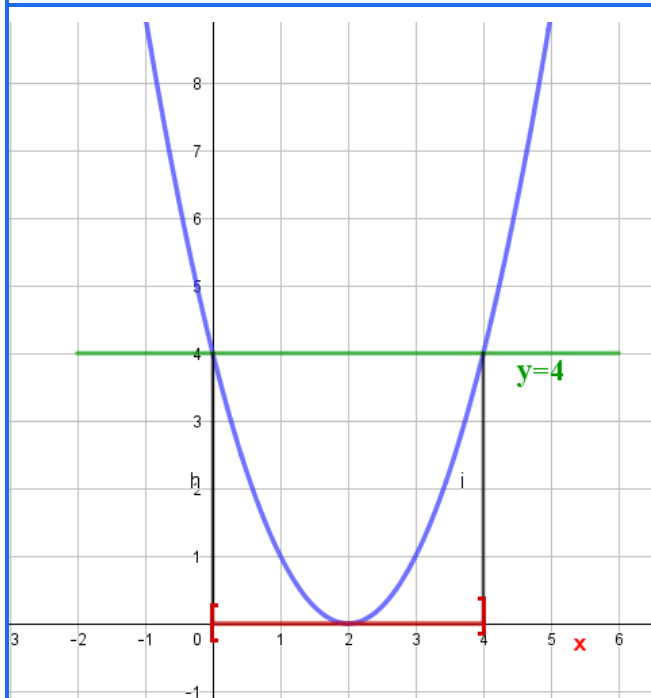
Pour cela, on trace la droite d'équation $y = k$ (c'est aussi la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0; k)$).

On cherche tous les points de la courbe dont l'ordonnée est plus grande que k .

Exemples

a. Résoudre graphiquement l'équation :

$$x^2 - 4x + 4 \leq 4$$

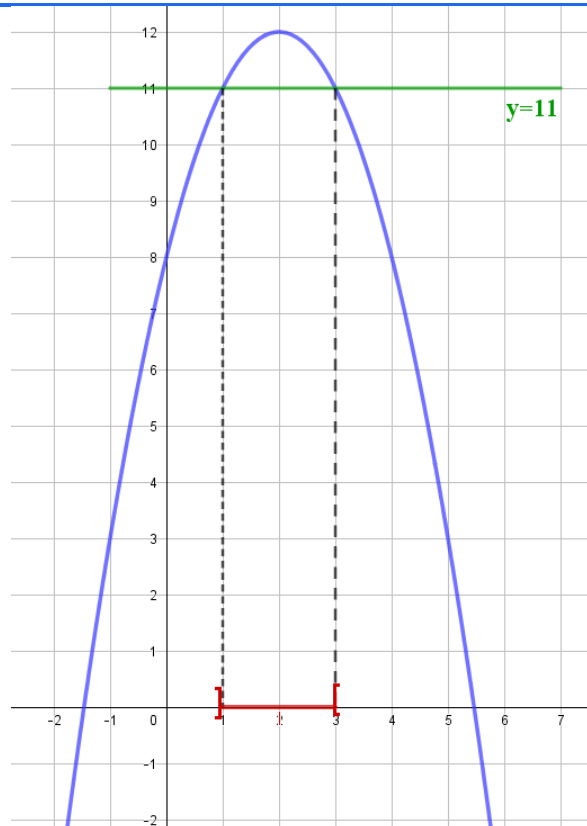


Graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 4x + 4 \leq 4$ est l'intervalle **$[0; 4]$**

Les valeurs 0 et 4 font parties des solutions.

b. Résoudre graphiquement l'équation :

$$-x^2 + 4x + 8 > 11$$



Graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 4x + 8 > 11$ est l'intervalle **$]1; 3[$** . Les valeurs 1 et 3 ne font pas partie des solutions.

III) Variations d'une fonction

1) Définition : fonctions croissante et décroissante

Une fonction f est **croissante** :

- Lorsque les abscisses x **augmentent**, les ordonnées $f(x)$ **augmentent** aussi. C'est-à-dire que la fonction f est croissante si sa courbe représentative **monte** lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses.

- Pour tout nombre a et b appartenant à un intervalle I , Si $a < b$ et que $f(a) < f(b)$ alors la fonction f est croissante sur cet intervalle I .

Une fonction f est **décroissante** :

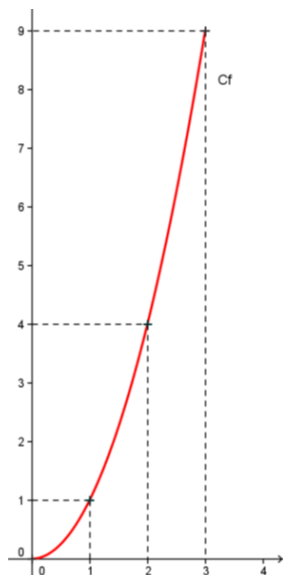
- Lorsque les abscisses x **augmentent**, les ordonnées $f(x)$ **diminuent**. C'est-à-dire que la fonction f est décroissante si sa courbe représentative **descend** lorsqu'on la parcourt dans le sens de l'axe des abscisses.

- Pour tout nombre a et b appartenant à un intervalle I , Si $a < b$ et que $f(a) > f(b)$ alors la fonction f est décroissante sur cet intervalle I .

Une fonction f est **constante** :

Lorsque quelque soit l'abscisse x , l'ordonnée $f(x)$ a toujours la même valeur. Si $a < b$ et que $f(a) = f(b)$ alors la fonction f est **constante** sur cet intervalle I .

Exemple 1



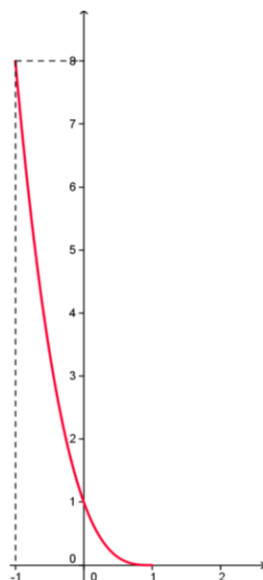
La fonction f est croissante sur $[0 ; 3]$:

Sa courbe représentative monte lorsque nous la parcourons dans le sens de l'axe des abscisses entre $x = 0$ et $x = 3$

Tableau de variation correspondant :

x	0	3
$f(x)$	0	9

Exemple 2



La fonction f est décroissante sur $[-1 ; 1]$:

Sa courbe représentative descend lorsque nous la parcourons dans le sens de l'axe des abscisses entre $x = -1$ et $x = 1$

Tableau de variation correspondant :

x	-1	1
$f(x)$	8	0

2) Lecture d' un tableau de variation

Les informations relatives au sens de variation d'une fonction peuvent être résumées sous la forme d'un tableau que l'on appelle tableau de variation.

Exemple : Soit f une fonction dont le tableau de variation est :

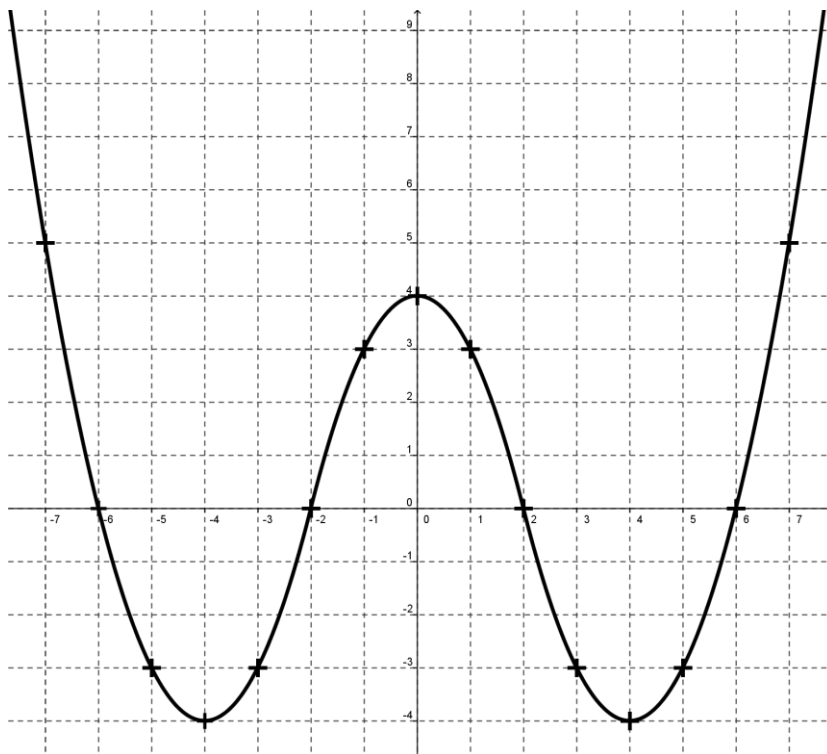
x	0			2	6
$f(x)$	5	$\searrow$			$\nearrow$
		-1		3	$\searrow$
					1

La lecture de ce tableau nous permet d'affirmer que:

- la fonction f est décroissante sur $[-4 ; 0]$
- la fonction f est croissante sur $[0 ; 2]$
- la fonction f est décroissante sur $[2 ; 6]$
- $f(-4) = 5$; $f(0) = -1$; $f(2) = 3$ et $f(6) = 1$

3) A partir d'une représentation graphique

Exemple : Nous avons représenté graphiquement une fonction f ci-dessous :



A partir de ce graphique déterminer le tableau de variation de cette fonction sur l'intervalle $[-7 ; 7]$

En lisant ce graphique de gauche à droite nous voyons que la fonction décroît sur $[-7 ; -4]$ puis elle croît sur $[-4 ; 0]$, elle décroît de nouveau sur $[0 ; 4]$ puis elle croît sur $[4 ; 7]$.

Par lecture graphique nous savons que : $f(-7) = 5$; $f(-4) = -4$; $f(0) = 4$; $f(4) = -4$ et $f(7) = 5$

Nous en déduisons le tableau de variation :

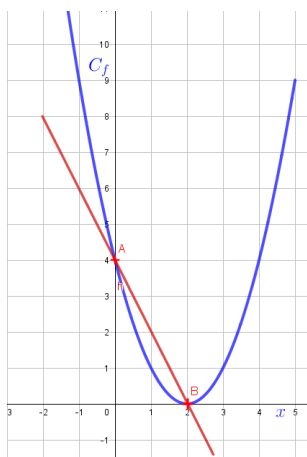
x	-7	-4	0	4	7
$f(x)$	5	$\searrow$ -4	$\nearrow$ 4	$\searrow$ -4	$\nearrow$ 5

A partir de ce tableau de variation nous voyons que pour tout $x \in [-7; 7]$, $f(x) \geq -4$

IV) Taux de variation entre deux valeurs de la variable x d'une fonction f

1) Définition

Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Le nombre t est la **pente** (coefficient directeur) de la droite passant par les points **A(a ; f(a))** et **B(b ; f(b))**.

2) Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$. Déterminer le taux de variation de f entre 2 et 5

Méthode :

On calcule $f(5)$: $f(5) = 2 \times 5^2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53$

On calcule $f(2)$: $f(2) = 2 \times 2^2 + 3 = 8 + 3 = 11$

On applique la formule : $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ en remplaçant b par 5 et a par 2 donc :

$$t = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{53-11}{5-2} = \frac{42}{3} = 14 \quad \text{Le taux de variation de } f \text{ entre 2 et 5 est 14}$$

3) Lien entre le signe du taux de variation et la monotonie de la fonction

Si le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres quelconques d'un intervalle I est :

- **positif** alors f est strictement **croissante** sur I .
- **négatif** alors f est strictement **décroissante** sur I .
- **nul** alors f est **constante** sur I .

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 2$; Soit a et b deux nombres réels ($a \neq b$)

Calculons d'abord $f(b)$: $f(b) = 4b + 2$

Calculons ensuite $f(a)$: $f(a) = 4a + 2$

Appliquons la formule : $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $t = \frac{4b+2-(4a+2)}{b-a} = \frac{4b+2-4a-2}{b-a} = \frac{4b-4a}{b-a} = \frac{4(b-a)}{b-a} = 4$

Pour tout nombre a et b deux nombres réels ($a \neq b$) $t = 4 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$; Soit a et b deux nombres réels ($a \neq b$)

Calculons d'abord $f(b)$: $f(b) = -2b$

Calculons ensuite $f(a)$: $f(a) = -2a$

Appliquons la formule : $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $t = \frac{-2b-(-2a)}{b-a} = \frac{-2b+2a}{b-a} = \frac{-2(b-a)}{b-a} = -2$

Pour tout nombre a et b deux nombres réels ($a \neq b$) $t = -2 < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.