

# Dérivées et applications

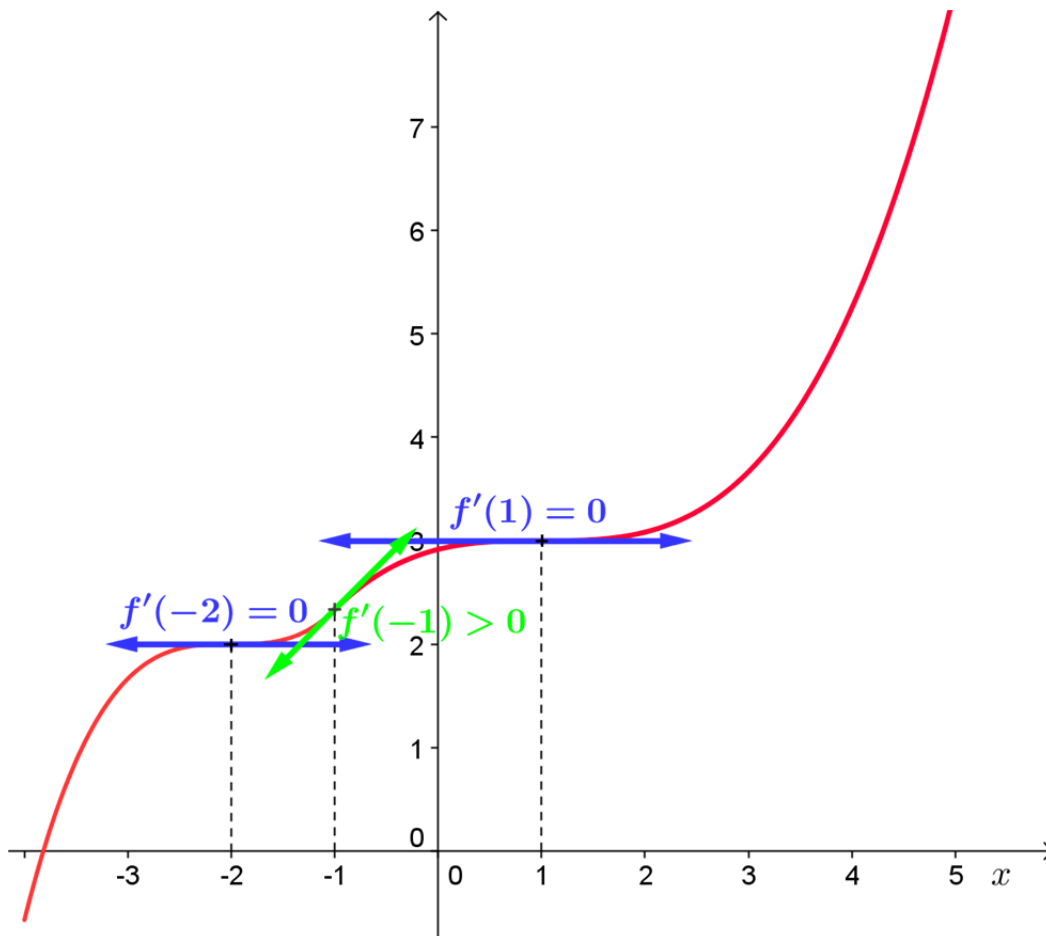
## I) Dérivée d'une fonction strictement monotone

### 1) Exemples graphiques

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x$ .

➤ **Si  $f$  est strictement croissante sur  $I$**

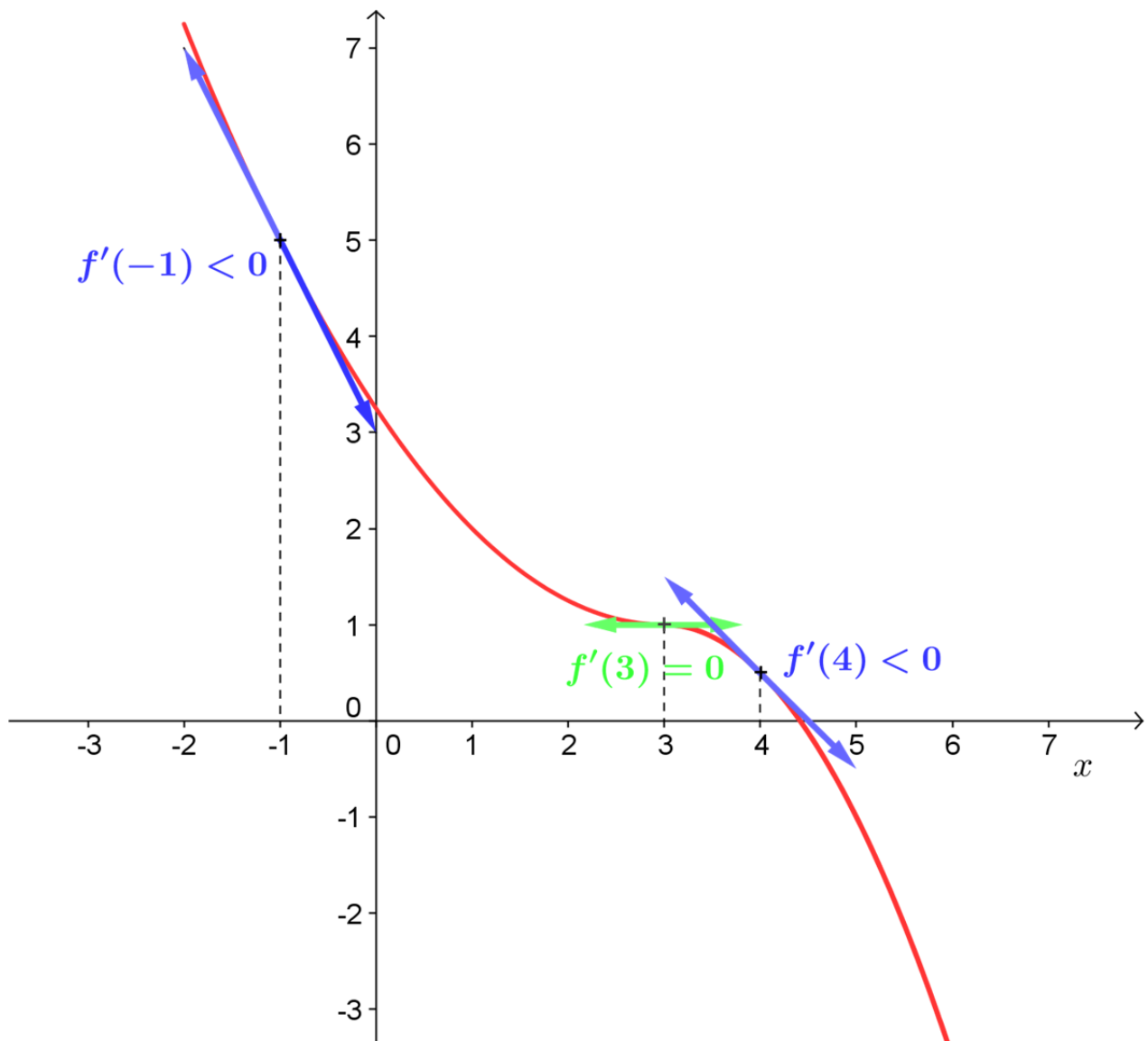


Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement positif
- Soit égal à zéro (dans le cas de tangente horizontale)

On constate graphiquement que  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$

➤ Si  $f$  est strictement décroissante sur  $I$



Les tangentes à la courbe ont toutes un coefficient directeur :

- Soit strictement négatif
- Soit égal à zéro (dans ce cas la tangente horizontale)

On constate graphiquement que  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$

## 1) Propriété

**Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$**

- Si  $f$  est **strictement croissante sur  $I$** , alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$
- Si  $f$  est **strictement décroissante sur  $I$** , alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$

**Démonstration :**

Supposons  $f$  strictement croissante sur  $I$  et dérivable sur  $I$ .

Alors pour tout réel  $a$  de  $I$  et pour tout  $h$  ( $h \neq 0$  tel que  $a + h \in I$ )

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Si  $h > 0$  alors  $a + h > a$  et  $f(a + h) > f(a)$  par stricte croissance de  $f$
- Si  $h < 0$  alors  $a + h < a$  et  $f(a + h) < f(a)$  par stricte croissance de  $f$

Dans les deux cas  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$ . On admet que la limite  $f'(a)$  quand  $h$  tend vers 0 de ces nombres tous strictement positifs est positive ou nulle, pour tout  $a$  dans  $I$

Si  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ , on montre de même que  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$  et que la limite sera elle négative ou nulle.

## II) Sens de variation et dérivée

### Théorème de stricte monotonie

**Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .**

- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$  alors  $f$  est **constante sur  $I$**  ;
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de  $x$  où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est **strictement croissante sur  $I$**  ;
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de  $x$  où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est **strictement décroissante sur  $I$** .

**Ce théorème est admis**

**Exemples**

**1°)** Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

La fonction  $f$  est une fonction polynôme définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$f'$  est un trinôme du second degré ayant deux racines 0 et 2 donc son signe s'obtient à l'aide du tableau :

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
Signe de $3x(x-2)$	+	0	-	0	+

L'étude du signe de  $f'$  montre que :

- $f'(x) > 0$  sur les intervalles  $]-\infty ; 0[$  et  $]2 ; +\infty[$ , donc que  $f$  est strictement croissante sur ces intervalles.
- $f'(x) < 0$  sur l'intervalle  $]0 ; 2[$ , donc que  $f$  est strictement décroissante sur cet intervalle.

**2°)** Soit  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$  définie et dérivable sur  $D = ]-\infty ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif donc sur  $D$ ,  $f'(x)$  possède le même signe que son numérateur qui est un trinôme du second degré possédant deux racines  $-1$  et  $3$  dont le signe est donné par le tableau :

$x$	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Signe de $(x+1)(x-3)$	+	0	-	0	+

- Sur  $]-\infty ; -1[$  on a  $f'(x) > 0$  et  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle ;
- Sur  $]-1 ; 1[$  on a  $f'(x) < 0$  et  $f$  est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur  $]1 ; 3[$  on a  $f'(x) < 0$  et  $f$  est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- Sur  $]3 ; +\infty[$  on a  $f'(x) > 0$  et  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

### III) Lecture d'un tableau de variation

#### Convention

**Dans un tableau de variation d'une fonction  $f$ , une flèche indique :**

- **La stricte croissance ou décroissance de  $f$  sur l'intervalle correspondant ;**
- **L'absence de rupture ( ou continuité ) de la courbe de  $f$  sur cet intervalle.**

**Une double barre dans le tableau de variation indique qu'il y a rupture que la fonction n'est pas définie pour une ou des valeurs de  $x$ .**

## Exemples :

1°)

$x$	-5	1	3	7	
Signe de $f'(x)$	+		-	+	
Variations de $f$	-1	↗ 3 ↘		-2	↗ 5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[-5; 7]$
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur les intervalles  $[-5; 1]$  et  $[3; 7]$
- La fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[1; 3]$
- La courbe est sans rupture sur les intervalles  $[-5; 1]$ ;  $[1; 3]$  et  $[3; 7]$  (on dit aussi que la fonction  $f$  est continue sur ces intervalles)
- $f(-5) = -1$  ;  $f(1) = 3$  ;  $f(3) = -2$  et  $f(7) = 5$


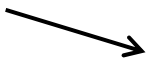

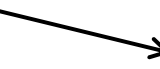
2°)

$x$	-7	4	8	
Signe de $f'(x)$	+		-	
Variations de $f$	2	↗	↘	-5

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'ensemble  $D = [-7; 4[ \cup ]4; 8]$
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[-7; 4[$
- La fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]4; 8]$
- La courbe possède une rupture pour  $x = 4$  mais elle est sans rupture sur les intervalles  $[-7; 4[$  et  $]4; 8]$
- $f(-7) = 2$  ;  $f(8) = -5$  et le réel 4 n'a pas d'image.

3°)

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	-	+	-	
Variations de $f$			<b>3</b>		

Le tableau ci-dessus apporte les renseignements suivants :

- La fonction  $f$  est définie sur l'ensemble  $D = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$
- La fonction  $f$  est dérivable sur l'ensemble  $D$  privé de  $0$
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur les intervalles  $] -\infty; -2[$  et  $[0; 2[$
- La fonction  $f$  est strictement décroissante sur les intervalles  $] -2; 0[$  et  $] 2; +\infty[$
- La courbe possède des ruptures pour  $x = -2$  et pour  $x = 2$  mais elle est sans rupture sur les intervalles  $] -\infty; -2[$ ;  $] -2; 2[$  et  $] 2; +\infty[$
- $f(0) = 3$  ; et les réels  $-2$  et  $2$  n'ont pas d'image.