Dérivées des fonctions usuelles

I) Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in$ D

Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

II) Dérivées des fonctions usuelles

1) Fonction constante $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

La fonction constante $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 0$

Démonstration:

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

Donc pour tout réel a on a $f'(a) = 0$ d'où le résultat $f'(x) = 0$ pour tout x réel

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3{,}5$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x)$ **= 0**

2) Fonction $f(x) = x^n$ ($n \in \mathrm{N}$)

a) Fonction $f(x) = x$

La fonction $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 1$

Démonstration:

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ puisque $h \neq 0$

Donc pour tout réel a on a $f'(a) = 1$ d'où le résultat $f'(x) = 1$ pour tout x réel

b) Fonction $f(x) = x^2$

La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$

Démonstration:

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h}$

Donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + h$ puisque $h \neq 0$

Pour tout réel a lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $2a$

Donc on a $f'(a) = 2a$ d'où le résultat $f'(x) = 2x$ pour tout x réel

c) Fonction $f(x) = x^3$

La fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$

Résultat admis en première

d) Cas général : Fonction $f(x) = x^n$ $(n \in \mathrm{N})$

La fonction $f(x) = x^n (n \in N)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$

Résultat admis en première

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 7\,x^6$

3) Fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a ($\neq 0$).

On a pour tout réel $h \neq 0$ tel que a et $a+h$ soient de même signe

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ah(a+h)}$$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{-1}{a(a+h)}$ puisque $h \neq 0$

Pour tout réel $a \neq 0$ lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $\dfrac{-1}{a^2}$

Donc on a $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$ d'où le résultat $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

4) Fonction $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [et sa fonction dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a ($a \neq 0$).

On a pour tout réel $h > 0$ tel que **a et $a+h$ soient strictement positifs**

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\ )} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\ )}$$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ puisque $h \neq 0$

Pour tout réel $a \neq 0$ lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $\dfrac{-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$

Donc on a $f'(a) = \dfrac{-1}{2\sqrt{a}}$ d'où le résultat $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

Remarques :

- **La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable pour a = 0 (voir fiche Nombre dérivé et tangente)**

- **La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable sur les intervalles] - ∞ ; 0 [et] 0 ; + ∞ [**

Démonstration :

1°) Lorsque $x \in$] 0 ; +∞ [$f(x) = x$ donc f est dérivable (voir plus haut) et $f'(x) = 1$

2°) Lorsque $x \in]-\infty ; 0[$ $f(x) = -x$

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (a < 0).

On a pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h$ soit négatif

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-(a+h)-(-a)}{h} = \frac{-h}{h}$ = - 1 puisque $h \neq 0$

Donc pour $a < 0$ $f'(a) = -1$ et $f'(x) = -1$ sur] - ∞ ; 0 [

Remarque : le taux de variation prenant deux valeurs différentes sur] 0 ; + ∞ [et sur] - ∞ ; 0 [la fonction $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ **n'est pas dérivable en zéro**

III) Tableau récapitulatif

Fonction f :	***Dérivable sur*** :	***Fonction dérivée f'*** :
$f(x) = k \ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in N)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	**] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [**	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	**] 0 ; + ∞ [**	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$