

Dérivées et opérations

Préalable :

Dans toute la suite u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel.

I) Somme de deux fonctions

La fonction $u + v$ définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction $u + v$ pour $a \in D$

Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in D$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant dérivables en a , lorsque h tend vers 0 le premier quotient tend vers $u'(a)$ et le deuxième quotient vers $v'(a)$

Le taux de variation de la fonction $u + v$ tend vers $u'(a) + v'(a)$

Pour tout $a \in D$ la fonction dérivée de la fonction $u + v$ est bien $u' + v'$

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^4$ sur \mathbb{R}

On obtient $f'(x) = 1 + 4x^3$

2°) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 3$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x$

II) Produit d'une fonction par un réel

La fonction λu définie par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)$.

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction λu pour $a \in D$

Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in D$

$$\frac{(\lambda u)(a+h) - (\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h) - \lambda u(a)}{h} = \lambda \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Or la fonction u étant dérivable en a , lorsque h tend vers 0 le quotient tend vers $u'(a)$.

Le taux de variation de la fonction λu tend vers $\lambda u'(a)$

Pour tout $a \in D$ la fonction dérivée de la fonction λu est bien $\lambda u'$.

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 7x^3$ sur \mathbb{R}

On obtient $f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$

2°) $f(x) = \frac{4}{x}$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

3°) $f(x) = 5x^2 - 3\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

On obtient $f'(x) = 10x - 3\frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

III) Fonction polynôme

1) Définition

Une fonction f définie sur \mathbb{R} est une fonction **polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme kx^n avec $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) Dérivée

Une fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R}

Ceci est une conséquence des résultats du I) et du II)

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions polynômes suivantes sur \mathbb{R} :

1°) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

On obtient $f'(x) = 2x + 3$

2°) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

On obtient $f'(x) = \frac{9}{2}x^2 - 10x + \frac{1}{2}$

IV) Produit de deux fonctions

La fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(Voir la démonstration pour ceux qui sont intéressés dans la fiche de cours en 1ere S : dérivées et opérations)

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^2 \sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x) = 2x \sqrt{x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

2°) $f(x) = (x^3 + 3x + 1)(2x^2 + 5x - 1)$ sur \mathbb{R}

En posant $u(x) = x^3 + 3x + 1$ et $v(x) = 2x^2 + 5x - 1$ on a

$$u'(x) = 3x^2 + 3 \text{ et } v'(x) = 4x + 5$$

$$\text{On obtient } f'(x) = (3x^2 + 3)(2x^2 + 5x - 1) + (x^3 + 3x + 1)(4x + 5)$$

On peut développer cette expression si c'est nécessaire.

V) Inverse d'une fonction

La fonction $\frac{1}{v}$ définie par $(\frac{1}{v})(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé

des réels où $v(x) = 0$ ($D \cap \{x \mid v(x) \neq 0\}$) et sa dérivée est définie par:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

(Voir la démonstration pour ceux qui sont intéressés dans la fiche de cours en 1ere S : dérivées et opérations)

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{1}{x^2+7}$ sur \mathbb{R}

En posant $u(x) = x^2 + 7$ on a $u'(x) = 2x$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+7)^2}$$

2°) $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty [$

En posant $u(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{\frac{-4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$$

VI) Quotient de deux fonctions

La fonction $\frac{u}{v}$ définie par $(\frac{u}{v})(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ ($D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$) et sa dérivée est définie par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

(Voir la démonstration pour ceux qui sont intéressés dans la fiche de cours en 1ere S : dérivées et opérations)

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1^\circ) f(x) = \frac{3x+1}{5x-3} \quad \text{sur }]-\infty ; \frac{3}{5}[\cup]\frac{3}{5} ; +\infty [$$

En posant $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 5x - 3$ on a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{3(5x-3) - 5(3x+1)}{(5x-3)^2} = \frac{-14}{(5x-3)^2}$$

$$2^\circ) f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 1} \quad \text{sur }]-\infty ; -\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3} ; +\infty [$$

En posant $u(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = 3x + 1$ on a $u'(x) = 4x - 3$ et $v'(x) = 3$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{(4x-3)(3x+1) - 3(2x^2 - 3x + 1)}{(3x+1)^2} = \frac{12x^2 + 4x - 9x - 3 - 6x^2 + 9x - 3}{(3x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 4x - 6}{(3x+1)^2}$$

VII) Tableau récapitulatif

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

<i>Fonction</i>	<i>Dérivable sur</i>	<i>Dérivée</i>
$u + v$	D	$u' + v'$
λu	D	$\lambda u'$
uv	D	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$