Suites arithmétiques

I) Définition:

Soit n_0 un nombre un entier naturel

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est arithmétique si, partant du

TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on

AJOUTE toujours le même nombre appelé RAISON

Exemple : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

• Le budget total pour un mois d'abonnement est : 40 + 30 = 70
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €

• Le budget total pour deux mois d'abonnement est: 70 + 30 = 100
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €

• Le budget total pour trois mois d'abonnement est: 100 + 30 = 130
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite ……..On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement: $u_1 = 70$

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement: $u_2 = u_1$ **+ 30** = 70 + 30 = 100

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement: $u_3 = u_2$ **+ 30** = 100 + 30 = 130

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement: $u_n = u_{n-1}$ **+ 30**

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30)

Algorithme: dans cet algorithme $\boldsymbol{n_0 = 0}$

Cet algorithme permet d'obtenir les premiers termes d'une suite arithmétique.

- Déclaration des variables :
  i , n entiers ;
  u , r réels ;
- Instructions d'entrée :
  Entrer la valeur de l'entier n ; {n est le rang du dernier terme que l'on veut obtenir}
  Entrer la valeur du réel u et celle du réel r; {u est le terme initial, r la raison}
- Traitement des données :
  Pour i variant de 0 à n
    Afficher u ;
    Affecter à u la valeur de u+r ;
  Fin de la boucle Pour ;
- Fin de l'algorithme.

{Les affichages successifs donnent les valeurs des termes de la suite}

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $n \geq n_0$, un entier naturel.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur appelée raison :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 + nr$

Remarques.

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite arithmétique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 additions du nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}

3) Calculer u_n en fonction de n

4) A partir de quel rang la suite u est-elle supérieure ou égale à 100 ?

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} - u_n= 3. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de 1^er^ terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ **u_1 = 4**
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ **u_2 = 7**
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$ **u_3 = 10**

On applique la 2ème formule :

$u_{23} = u_0 + 23 \times 3$
$u_{23} = 1 + 23 \times 3 = 70$ **u_{23} = 70**

3) $u_n = U_0 + n \times 3$ u_n = **1 + 3n**

4) $u_n \geq 100$ en utilisant la question précédente on obtient $1 + 3n \geq 100$

$3n \geq 99$ d'où $n \geq 33$. **A partir du terme d'indice 33 , u_n est supérieure ou égale à 100**

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n - 2$ et $\boldsymbol{u_1} = 5$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} - u_n = -2. La suite est donc arithmétique de raison -2 et de 1er terme 5 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois -2).

2) $u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3$ **u_2 = 3**
$u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1$ **u_3 = 1**
$u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1$ **u_4 = -1**

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 + (30 - 1) \times (-2)$ le 1er terme de la suite est U_1 au lieu de U_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 + (n-1)r$

$u_{30} = 5 + 29 \times (-2) = -53$ **u_{30} = -53**

3) $u_n = u_1 + (n - 1) \times (-2)$

$u_n = 5 + (n - 1) \times (-2)$ u_n **= 7 - 2n**

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur ℕ par $u_3 = 4$ et $u_5 = 12$.
Déterminer la raison et le 1er terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers m et n :

$u_n = u_m + (n - m)$ r

$u_5 = u_3 + (5 - 3)$ r

12 = 4 + 2 r donc **r = 4.**

Son 1er terme est u_0 : $U_3 = u_0 + 3 \times 4$ on obtient : $12 = u_0 + 12$ donc $\boldsymbol{u_0}$ **= 0**

La suite arithmétique u a pour raison 4 et a pour 1er terme $\boldsymbol{u_0}$ = 0

Exemple 4 : Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $u_n = 3n + 8$
Montrer que $\boldsymbol{u}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son 1er terme u_0

Réponse :

Pour tout n appartenant à ℕ, $u_{n+1} = 3(n+1) + 8 = 3n + 3 + 8 = 3n + 11$
Pour tout n appartenant à ℕ, $u_{n+1} - u_n = 3n + 11 - 3n - 8 = 3$

La suite est donc arithmétique de raison 3. $u_0 = 3\times 0 + 8 = 8$.
Son 1er terme est $\boldsymbol{u_0}$ = 8

Démonstration de l'équivalence des deux formules:

- **Cas particulier où le premier rang est 0 :**

- Tout d'abord montrons que si $\boldsymbol{u_n = u_0 + n\,r}$ alors $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n,

$u_n = u_0 + nr$ alors $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ donc $u_{n+1} - u_n = u_0 + (n+1)r - (u_0 + nr)$

donc $u_{n+1} - u_n = u_0 + nr + r - u_0 - nr = r$

donc $u_{n+1} - u_n = r$

ce qui prouve que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$

- Montrons maintenant la réciproque qui est :

si $u_{n+1} = u_n + r$ alors $u_n = u_0 + nr$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = u_n + r$

Ecrivons cette égalité pour tous les entiers entre 0 et n – 1 avec U_{n_0} = U_0

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array}\right\} \text{n lignes}$$

en additionnant membre à membre ces n égalités ci-contre on obtient :

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + r + u_1 + r + \ldots\ldots + u_{n-1} + r$

On constate que les termes s'annulent deux à deux sauf deux (u_0 et u_n) et on obtient pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 + nr$$

- **Cas général où le premier rang est n_0 :**

Si la suite (u_n) est définie à partir du rang n_0, alors on étudie la suite (v_n) définie par :

$v_n = u_{n+n_0}$ dans ce cas $v_0 = u_{n_0}$ ainsi on se ramène au cas précédent.

III) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété:

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r

- **Si r > 0, alors (u_n) est strictement croissante.**
- **Si r < 0, alors (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si r = 0, alors (u_n) est constante.**

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = u_n + r$ c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n = r$

• si r > 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ > 0 La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc strictement croissante.

• si r < 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ < 0 La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc strictement décroissante.

• si r = 0 alors pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ = 0 ce qui veut dire que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n}$. La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc constante

Exemples:

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

u_{n+1} = u_n + 3 et u_0 = 1

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} = u_n + 3

Donc u_{n+1} - u_n = 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} - u_n > 0

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

u_{n+1} = u_n - 2 et $\boldsymbol{u_1}$ = 5

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} = u_n - 2

Donc u_{n+1} - u_n = -2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_{n+1} - u_n < 0

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante

IV) Graphique.

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés, et cela la caractérise.

Si les points de la représentation graphique d'une suite sont alignés, alors c'est une suite arithmétique.

De plus, le coefficient directeur de la droite sur laquelle les points sont alignés est la raison de la suite arithmétique.

Démonstration :

$n \geq n_0$, un entier naturel. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r on peut donc écrire :

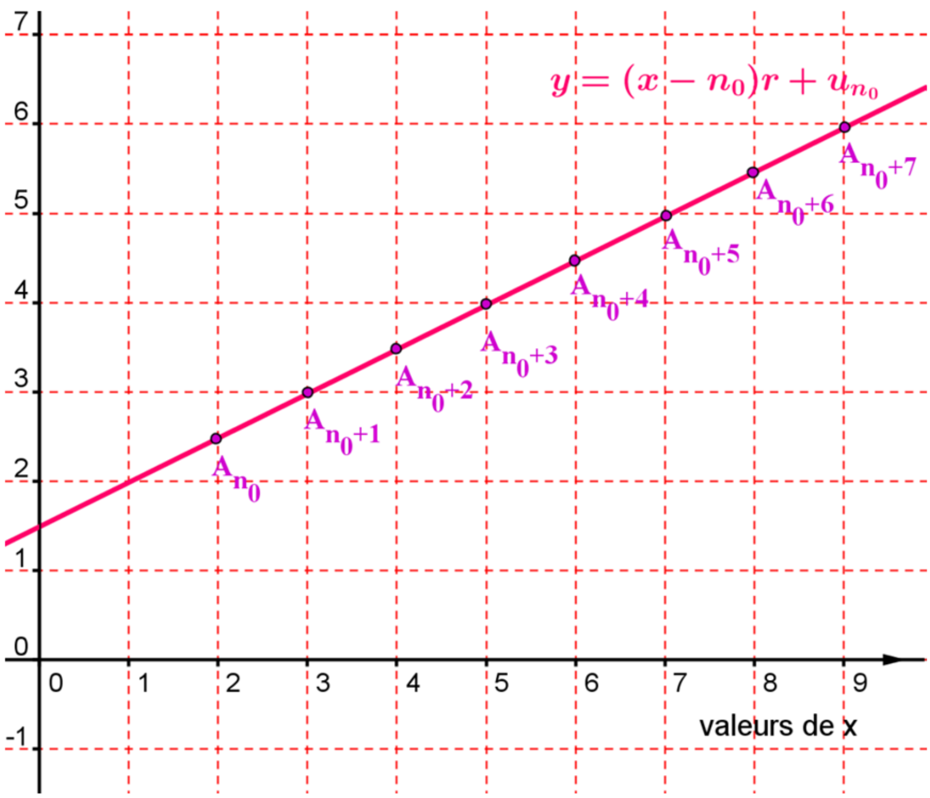
$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

Soit : $n \mapsto (n - n_0)r + u_{n_0}$

Considérons la fonction $x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = (x - n_0)r + u_{n_0} = rx - n_0 r + u_{n_0}$

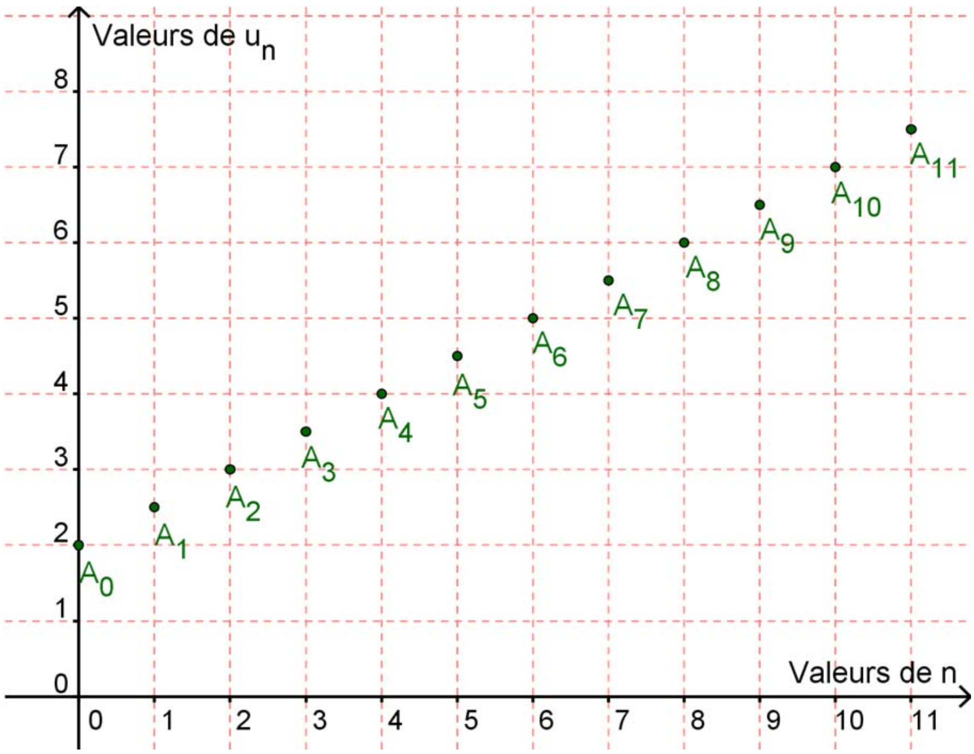
C'est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite.

Les nombres u_n sont les images des entiers n. Les points $A_n(n\ ;\ u_n)$ sont sur la droite : ils sont donc alignés.



Exemples:

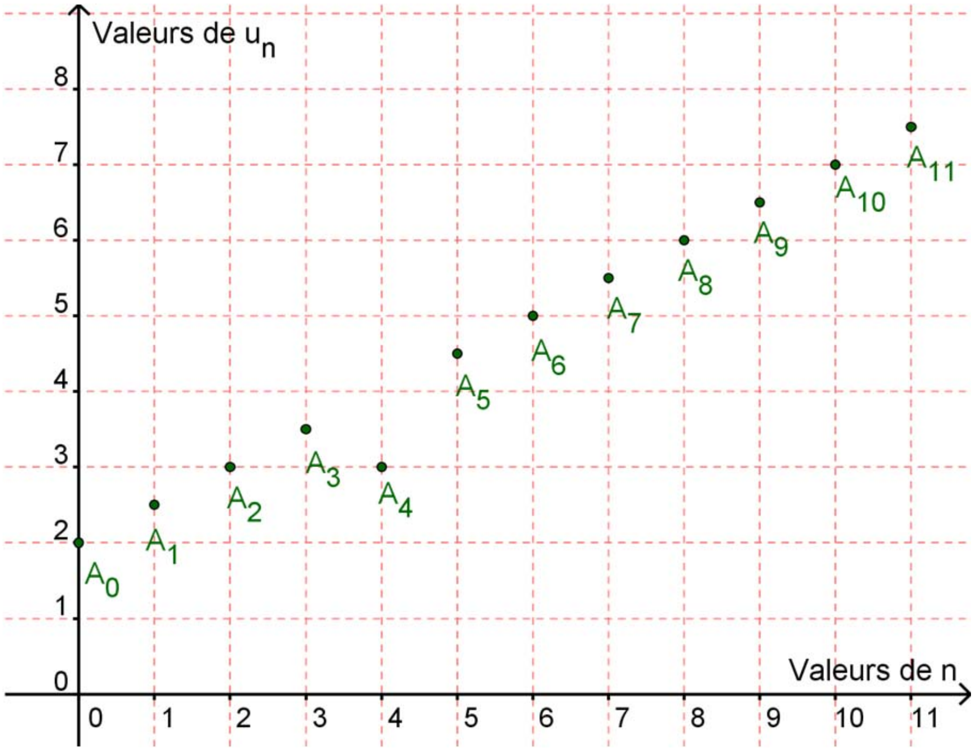
Exemple 1 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui peut être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n+1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut $0{,}5$.

On peut traduire cela par la formule $u_{n+1} - u_n = 0{,}5$. La suite peut donc être arithmétique de raison $0{,}5$.

Exemple 2 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui ne peut pas être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n+1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut $0{,}5$, sauf dans deux cas : pour $n=3$ et $n=4$.

On a donc $u_{n+1}-u_n=0{,}5$ pour $n\neq 3$ et $n\neq 4$, et $u_4-u_3=-0{,}5$ et $u_5-u_4=1{,}5$.

Ces valeurs n'étant pas les mêmes, on peut affirmer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Attention ! Sur ces graphiques, relier les points isolés n'a pas de sens !