Suites géométriques

I) Définition

Soit n_0 est un nombre entier naturel.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON

Exemple: Une voiture, achetée neuve coûtait 20 000 € (en 2008), perd chaque année 20%
de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :

$20\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 20\ 000 \times \mathbf{0{,}8} = 16\ 000$. En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : $16\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 16\ 000 \times \mathbf{0{,}8} = 12\ 800$. En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : $12\ 800 \times (1 - \frac{20}{100}) = 12\ 800 \times \mathbf{0{,}8} = 10\ 240$. En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. $u_0 = 20\ 000$

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire $u_1 = u_0 \times \mathbf{0{,}8} = 16\ 000$

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire $u_2 = u_1 \times \mathbf{0{,}8} = 12\ 800$

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{0{,}8}$

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

Algorithme : dans cet algorithme $\boldsymbol{n_0 = 0}$

Cet algorithme permet d'obtenir les premiers termes d'une suite géométrique.

- Déclaration des variables :
  i , n entiers ;
  u , q réels ;
- Instructions d'entrée :
  Entrer la valeur de l'entier n ; {n est le rang du dernier terme que l'on veut obtenir}
  Entrer la valeur du réel u et celle du réel q ; {u est le terme initial, q la raison}
- Traitement des données :
  Pour i variant de 0 à n
    Afficher u ;
    Affecter à u la valeur de u×q ;
  Fin de la boucle Pour ;
- Fin de l'algorithme.

{Les affichages successifs donnent les valeurs des termes de la suite}

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à n_0,.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q appelée raison:

$$u_{n+1} = u_n \times \mathrm{q}$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_m en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Remarques:

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite géométrique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 multiplications par le nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par: u_{n+1}= u_n × 3 et u_0 = 2

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1}= u_n × 3 . On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3 , la suite est donc géométrique de raison 3 et de 1er terme 2

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ $\boldsymbol{u_1 = 6}$

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ $\boldsymbol{u_2 = 18}$

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ $\boldsymbol{u_3 = 54}$

On applique la 2ème formule :

$u_{15} = u_0 \times 3^{15}$

$u_{15} = 2 \times 3^{15}$ $\boldsymbol{u_{15} = 28\ 697\ 814}$

3) $u_n = u_0 \times 3^n$ $\boldsymbol{u_n = 2 \times 3^n}$

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par:

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \frac{u_n}{2}$ et $u_1 = 3$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à ℕ, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$ .La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme 3 .

2) $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\boldsymbol{u_2 = 1{,}5}$

$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ $\boldsymbol{u_3 = 0{,}75}$

$u_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}75$ $\boldsymbol{u_4 = 0{,}375}$

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 \times (\frac{1}{2})^{30-1}$

le 1er terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_{30} = 3 \times (\frac{1}{2})^{29}$ $\boldsymbol{u_{30} = \frac{3}{2^{29}}}$

3) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$ $u_n = \boldsymbol{\frac{3}{2^{n-1}}}$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_6 = 32$.
Déterminer la raison et le 1er terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers m et n :

$u_n = u_m \times q^{(\mathrm{n-m})}$

$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$

$32 = 4 \times q^3$ donc q^3 **=** 8. Donc $q = 2$

Son 1er terme est u_0 : $u_3 = u_0 \times q^3$

on obtient : $4 = u_0 \times 2^3$ Donc $u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$**.**

La suite géométrique u a pour raison 2 et a pour 1er terme $u_0 = \frac{1}{2}$

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie par: $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1.Montrer que pour tout entier n , $u_n = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme U_0

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{5}{4}$. $u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$

Son 1er terme est u_0 = 5

Démonstration de l'équivalence des deux formules:

- **Cas particulier où le premier rang est 0 :**

- Tout d'abord montrons que si $u_n = u_0 \times q^n$ **alors** $u_{n+1} = u_n \times q$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q = q \times u_n$, donc $u_{n+1} = u_n \times q$.

- **Montrons maintenant la réciproque qui est** :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$ alors $u_n = u_0 \times q^n$

($u_0 \neq 0$) et (q $\neq 0$) ainsi aucun u_n n'est nul.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_0 \times q \\ u_2 = u_1 \times q \\ u_3 = u_2 \times q \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = u_{n-2} \times q \\ u_n = u_{n-1} \times q \end{array}\right\} \text{n lignes}$$

en multipliant membre à membre ces n égalités ci-contre on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \ldots \times u_{n-1} \times q$$

On constate que les termes se simplifient deux à deux sauf deux (u_0 et u_n) et on obtient pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

- **Cas général où le premier rang est n_0 :**

Si la suite (u_n) est définie à partir du rang n_0, alors on étudie la suite (v_n) définie par :

$v_n = u_{n+n_0}$ dans ce cas $v_0 = u_{n_0}$ ainsi on se ramène au cas précédent.

III) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q (q > 0) et de 1er terme u_{n_0} :

	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est constante.
$u_{n_0} < 0$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est constante.
$u_{n_0} = 0$	(u_n) est une suite nulle		

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q (q > 0) et de 1er terme u_{n_0} alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n_0} \times q^n$

$u_{n+1} - u_n = u_{n_0} \times q^{n+1} - u_{n_0} \times q^n = \boldsymbol{u_{n_0} \times q^n\ (q-1)}$

1er cas : $u_{n_0} > 0$

• **Si 0 < q < 1** alors $q - 1 < 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n\ (q-1) < 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ on a alors :
$u_{n+1} < u_n$. **La suite La suite (u_n) est donc strictement décroissante.**

• **si q >1** alors $q - 1 > 0$, , pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n\ (q-1) > 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ on a alors :
$u_{n+1} > u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement croissante.**

• **si q = 1** alors $q - 1 = 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ on a alors :
$u_{n+1} = u_n$. **La suite (u_n) est donc constante.**

2ème cas : $u_{n_0} < 0$

• **Si 0 < q < 1** alors $q - 1 < 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n\ (q-1) > 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ on a alors :
$u_{n+1} > u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement croissante**.

• si q >1 alors $q - 1 > 0$, , pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n\ (q-1) < 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ on a alors :
$u_{n+1} < u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement décroissante**.

• si q = 1 alors $q - 1 = 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ on a alors :
$u_{n+1} = u_n$. **La suite (u_n) est donc constante.**

$3^{ème}$ cas : $u_{n_0} =$ 0 pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n_0} \times q^n$ = 0. La suite est donc nulle.

Exemples:

Exemple 1:

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 > 1

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2:

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = -2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 > 1 mais $u_0 = -2 < 0$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 3 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

IV) Exemple de graphique

Exemples :

Si $r = 1$ ou si $u_0 = 0$, alors les points du graphiques sont alignés, sur la droite d'équation $y = u_0$ (**voir points rouges** ci-dessous pour $u_0 = 0$ et **les points bleus** pour $r = 1$ et $u_0 = 3$).
Les points verts ci-dessous sont les premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique de raison $1{,}2$ et de terme initial $u_0 = 0{,}5$.