Trinôme du second degré.

I) Définition

On appelle fonction trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$f : x \mapsto a x^2 + b x + c$ **avec a, b et c réels et $a \neq 0$.**

On dit que $a x^2 + b x + c$ est un polynôme du second degré ou un trinôme du second degré.

Exemple :

Soit f, g , h et j les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2$, où, avec les notations de l'encadré précédent, $a = 1$ et $b = c = 0$. f est donc une fonction polynôme du second degré.

$g(x) = 3x^2 - 5x + 2$, où, avec les notations de l'encadré précédent, $= 3$, $b = -5$ et $c = 2$.

$h(x) = (x + 1)(3 - x)$ On prouve en développant cette expression que la fonction h est bien polynômiale de degré 2 : $h(x) = (x + 1)\left(3 - x\right) = -x^2 + 2x + 3$, donc ici , avec les notations de l'encadré précédent, $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$.

$j(x) = 3x^2 + x$, où, avec les notations de l'encadré précédent, $= 3$, $b = 1$ et $c = 0$. j est donc une fonction polynôme du second degré.

Contre exemples : On prouve en annexe, à la fin de ce cours , que ces fonctions ne sont pas des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$.

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

n'est pas une fonction polynôme du second degré car en simplifiant on trouve

$f(x) = 4x$.

g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} - 4$

h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\cos x)^2 + \cos x + 1$.

ne sont pas non plus des trinômes du second degré.

II) Forme canonique

1) Définition et mise en place.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a $\neq 0$, un polynôme du second degré.

Comme a $\neq$ 0, pour tout réel x, on a $f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$

Or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

Donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

et enfin $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Cette écriture s'appelle forme canonique du trinôme .

Exemple 1: Soit $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$. Ecrire le trinôme $f(x)$ sous forme canonique.

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$ donc $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}$ et enfin

$\boldsymbol{f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}}$

Exemple 2 : Ecrire le trinôme $g(x)$ sous la forme canonique : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ donc $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 10)$ ou encore

$g(x) = -\frac{1}{2}[(x - 1)^2 - 1 - 10]$ et enfin :

$\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{2}[(x - 1)^2 - 11]}$

2) Application de la mise sous forme canonique

Reprenons l'exemple 1 ci-dessus : $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$.

On a vu que $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$,

Comme un carré est toujours positif, il est immédiat que $f(x) \geq -\frac{3}{4}$ et $f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$

Donc $-\frac{3}{4}$ est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

De plus un carré est décroissant puis croissant (voir cours de seconde) et son minimum est obtenu lorsqu'il s'annule. Ici, la quantité $(x - \frac{3}{2})^2$ s'annule pour $x = \frac{3}{2}$ donc est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2} ; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de f où l'on voit apparaître les valeurs mises en évidence dans la forme canonique :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$

Annexe.

Contre exemples *:* On prouve dans cette annexe que ces fonctions ne sont pas des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$.

• f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

n'est pas une fonction polynôme du second degré car en simplifiant on trouve

$f(x) = 4x$

En effet, cette fonction est monotone strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est le cas d'aucun trinôme du second degré.

• g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$

En effet cette fonction n'est pas définie en 0, alors qu'une fonction polynôme quelconque, en particulier celles du second degré, peuvent être évaluées en tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier en 0.

• h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\cos x)^2 + \cos x + 1$.

ne sont pas non plus des trinômes du second degré.

En effet, à partir de la double inégalité, valable pour tout $\in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

On obtient immédiatement

$$0 \leq (\cos x)^2 \leq 1$$

Donc, pour tout $\in \mathbb{R}$,

$$0 \leq h(x) \leq 3$$

S’il existait $a \neq 0$, b et c, trois réels tels que $h(x) = ax^2 + bx + c$, alors

soit $a < 0$ et dans ce cas, il existe deux réels m et p tels que $h(x) = a(x-p)^2 + m$ où m, qui est ici le maximum de h, est plus petit que 3.

Prenons $x = \frac{u+p\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}$ Alors $h(x) = -u^2 + m$.

Maintenant, pour $u = 2$, on a $h(x) = -4 + m \leq -1$ ce qui est absurde.

soit $a > 0$ et dans ce cas, il existe deux réels m et p tels que $h(x) = a(x-p)^2 + m$ où m, qui est ici le minimum de h, est plus grand que 0.

Prenons $x = \frac{u+p\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ Alors $h(x) = u^2 + m$.

Maintenant , pour $u = 2$, on a $h(x) = 4 + m \geq 4$ ce qui est absurde.