

Fonctions $\frac{1}{u}$

I) Fonction $\frac{1}{u}$

1) Définition

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et non nulle sur D (c'est à dire que pour tout $x \in D$ on a $u(x) \neq 0$).

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie pour tout $x \in D$ par :

$$x \mapsto \left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Exemples

1°) Si u est la fonction $u(x) = 4 - 2x$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors $\left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{4 - 2x}$

2°) Si u est la fonction $u(x) = x^2 - 1$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$$\text{alors } \left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

2) Etude

Soit une fonction u définie sur un ensemble D , non nulle sur D et monotone sur l'intervalle I ($I \subset D$).

La fonction $\frac{1}{u}$ possède sur I le sens de variation contraire de celui de la fonction u .

• 1^{er} cas :

Supposons la fonction u croissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I , si $x \leq y$ alors $u(x) \leq u(y)$

u étant non nulle sur I , $\frac{1}{u}$ est définie sur I

La fonction inverse étant strictement décroissante on a :

$$\frac{1}{u(x)} \geq \frac{1}{u(y)}, \text{ c'est-à-dire : } \left(\frac{1}{u}\right)(x) \geq \left(\frac{1}{u}\right)(y)$$

Ce qui prouve que la fonction $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I .

• 2^{ème} cas :

Supposons la fonction u décroissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I , si $x \leq y$ alors $u(x) \geq u(y)$

u étant non nulle sur I , $\frac{1}{u}$ est définie sur I

La fonction *inverse* étant strictement décroissante on a :

$$\frac{1}{u(x)} \leq \frac{1}{u(y)}, \text{ c'est-à-dire : } \left(\frac{1}{u}\right)(x) \leq \left(\frac{1}{u}\right)(y)$$

Ce qui prouve que la fonction $\frac{1}{u}$ est croissante sur I .

On dit que les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I .

3) Exemples

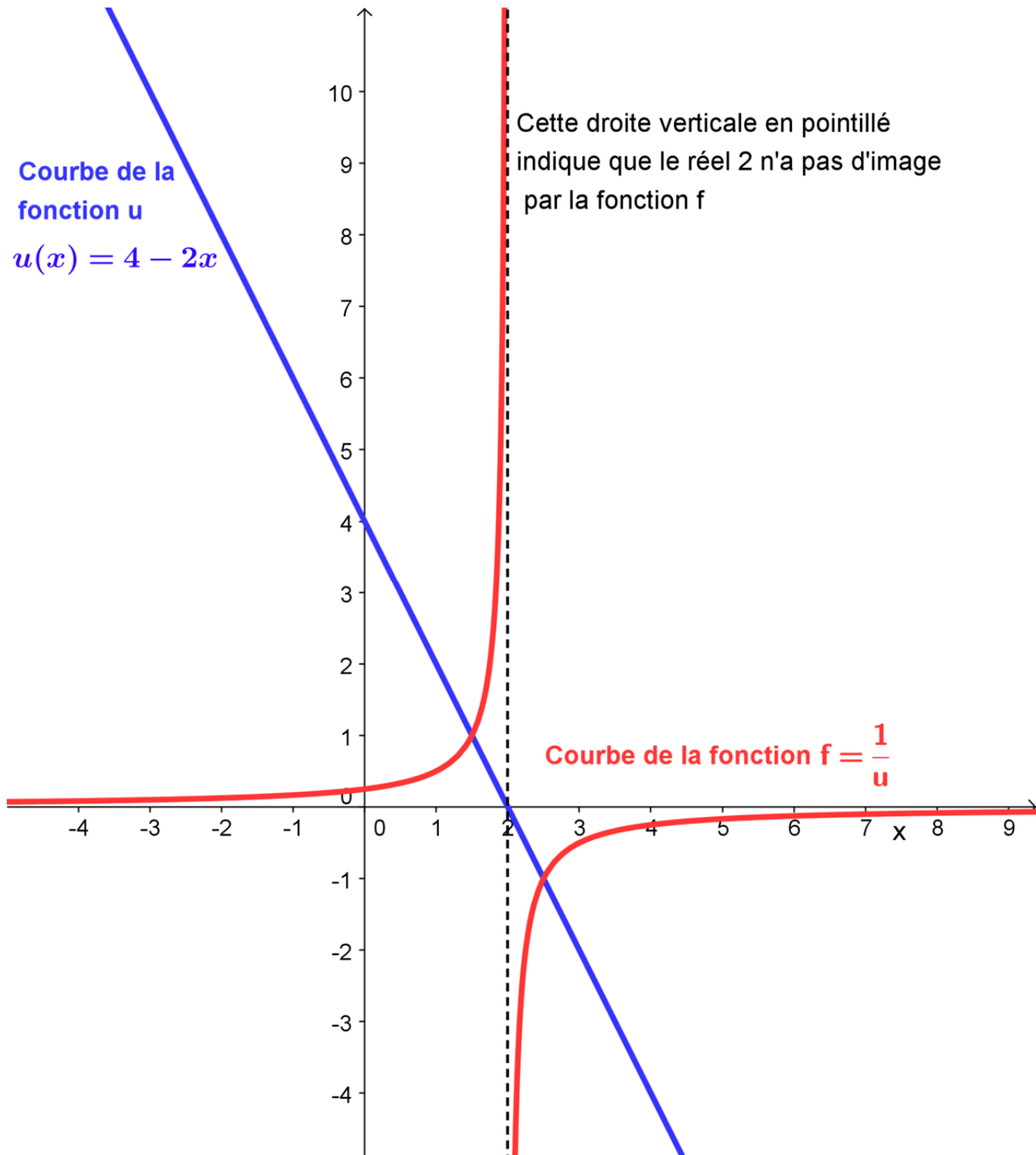
1°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = 4 - 2x$

- a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $4 - 2x \neq 0$ soit sur $D = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$
- b) La fonction u est strictement décroissante sur les deux intervalles $] - \infty ; 2 [$ et $] 2 ; + \infty [$ composant D donc f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles
- c) Courbes :

Courbe de la
fonction u

$$u(x) = 4 - 2x$$



2°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

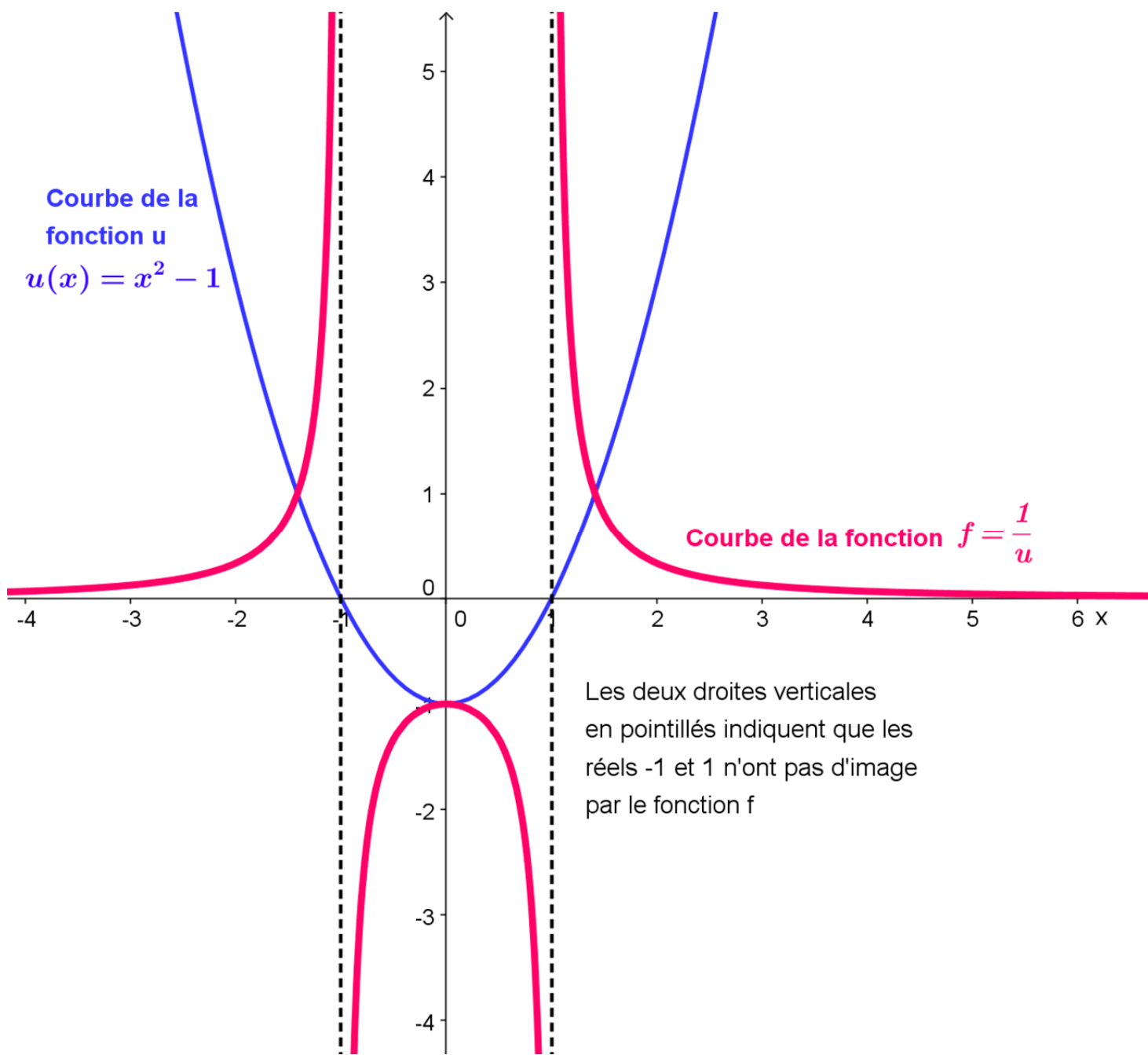
La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = x^2 - 1$

a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $x^2 - 1 \neq 0$ soit sur
 $D =] -\infty ; -1 [\cup] -1 ; 1 [\cup] 1 ; +\infty [$

b) La fonction u (fonction trinôme) est strictement décroissante sur les intervalles
 $] -\infty ; -1 [$ et $] -1 ; 0]$ donc f est strictement croissante sur ces intervalles.

La fonction u (fonction trinôme) est strictement croissante sur les intervalles
 $[0 ; 1[$ et $] 1 ; +\infty [$) donc f est strictement décroissante sur ces intervalles.

c) Courbes :

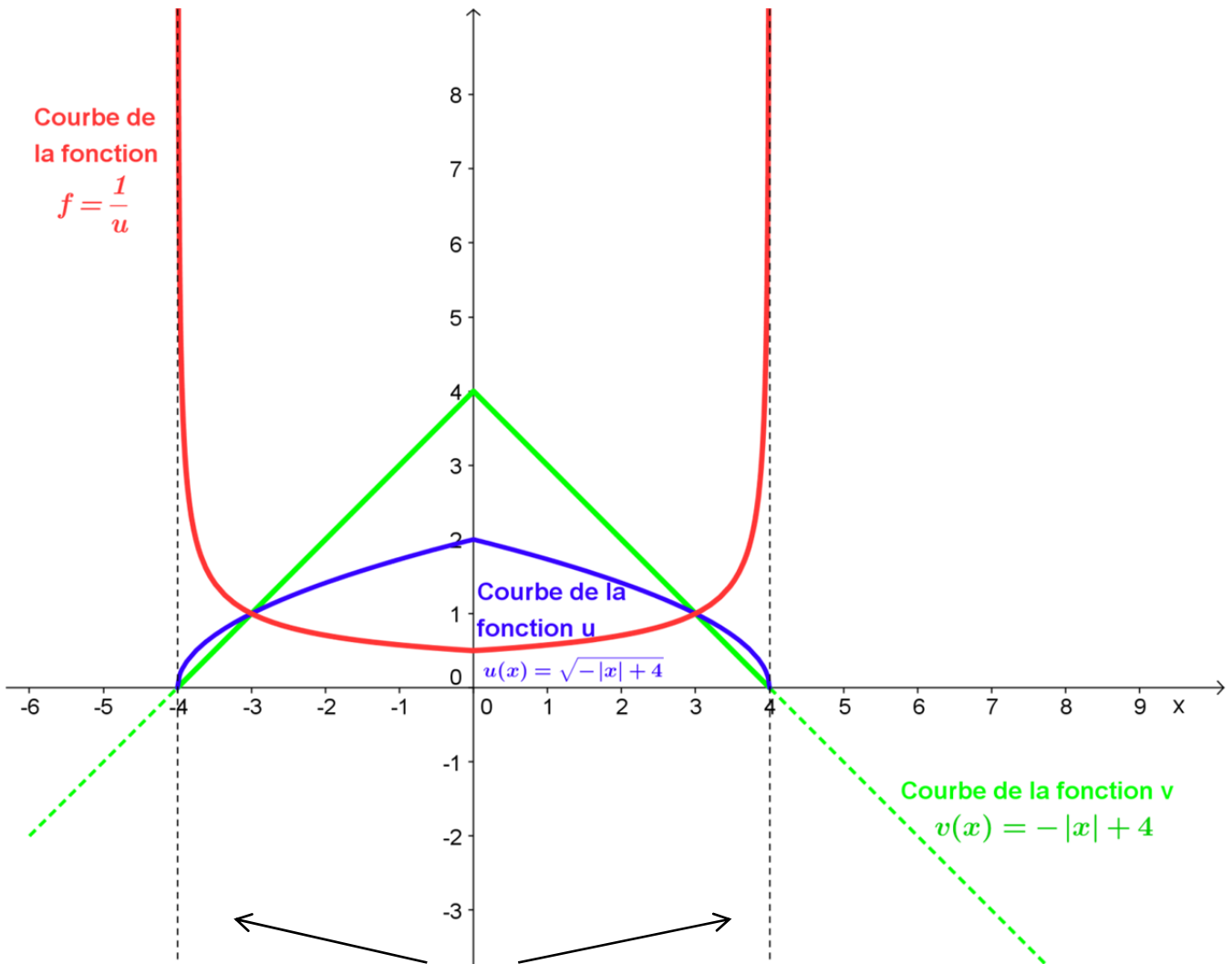


Exemple plus complexe utilisant plusieurs fiches de cours différentes

Etude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-|x|+4}}$

La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = \sqrt{-|x|+4}$

- a) La fonction u n'est définie que sur l'ensemble où $-|x| + 4 \geq 0$ soit
 $D = [-4 ; 4]$
La fonction f est définie sur l'ensemble où $u(x) \neq 0$ soit $x \neq -4$ et $x \neq 4$ donc
finalement f est définie sur l'intervalle $] -4 ; 4 [$
- b) La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $] -4 ; 0]$ puisqu'elle varie
comme la fonction v définie par $v(x) = -|x| + 4$
(voir les fiches de cours fonctions racine carrée de u , valeur absolue, $u + \lambda$ et λu)
donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- c) La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 4[$ puisqu'elle varie
comme la fonction v définie par $v(x) = -|x| + 4$ (voir les fiches de cours fonctions
valeur absolue, $u + \lambda$ et λu) donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- d) Courbes :



Les deux droites verticales en pointillées indiquent que les réels -4 et 4 n'ont pas d'image par f