Fonctions $\frac{1}{u}$

I) Fonction $\frac{1}{u}$

1) Définition

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et non nulle sur D (c'est à dire que pour tout $x \in$ D on a $u(x) \neq 0$).

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie pour tout $x \in$ D par :

$$x \mapsto \left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Exemples

1°) Si u est la fonction $u(x) = 4 - 2x$ sur D = $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$ alors ($\frac{1}{u}$) $(x) = \frac{1}{4-2x}$

2°) Si u est la fonction $u(x) = x^2 - 1$ sur D = $\mathbb{R} \setminus \{ -1 \ ; 1 \}$

alors ($\frac{1}{u}$) $(x) = \frac{1}{x^2-1}$

2) Etude

Soit une fonction u définie sur un ensemble D, non nulle sur D et monotone sur l'intervalle I (I $\subset$ D).

La fonction $\frac{1}{u}$ possède sur I le sens de variation contraire de celui de la fonction u.

- **1er cas :**

Supposons la fonction u croissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \leq u(y)$

u étant non nulle sur I, $\frac{1}{u}$ est définie sur I

La fonction inverse étant strictement décroissante on a :

$\frac{1}{u(x)} \geq \frac{1}{u(y)}$, c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{u}\right)(x) \geq \left(\frac{1}{u}\right)(y)$

Ce qui prouve que la fonction $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I.

- **2^{eme}cas :**

Supposons la fonction u décroissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x \leq y$ alors $u(x) \geq u(y)$

u étant non nulle sur I, $\frac{1}{u}$ est définie sur I

La fonction *inverse* étant strictement décroissante on a:

$\frac{1}{u(x)} \leq \frac{1}{u(y)}$, c'est-à-dire : $\left(\frac{1}{u}\right)(x) \leq \left(\frac{1}{u}\right)(y)$

Ce qui prouve que la fonction $\frac{1}{u}$ est croissante sur I.

On dit que les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I.

3) Exemples

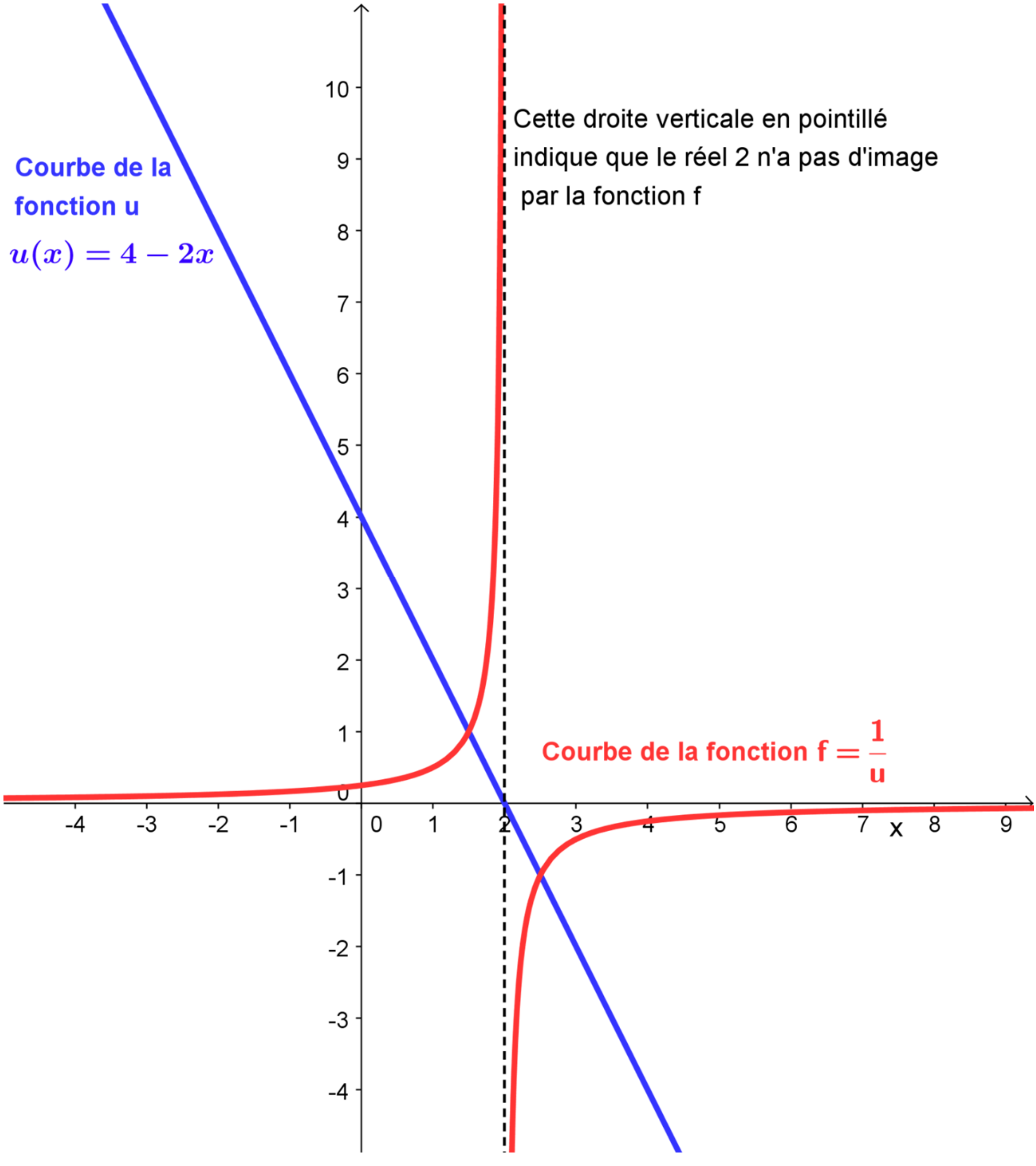
1°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = 4 - 2x$

a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $4 - 2x \neq 0$ soit sur D = $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$

b) La fonction u est strictement décroissante sur les deux intervalles] - ∞ ; 2 [et] 2 ; + ∞ [composant D donc f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles

c) Courbes :


Cette droite verticale en pointillé
indique que le réel 2 n'a pas d'image
par la fonction f
Courbe de la
fonction u
$u(x) = 4 - 2x$
Courbe de la fonction $f = \frac{1}{u}$
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

2°) Etude de la fonction f définie par $f(x)$ = $\frac{1}{x^2-1}$

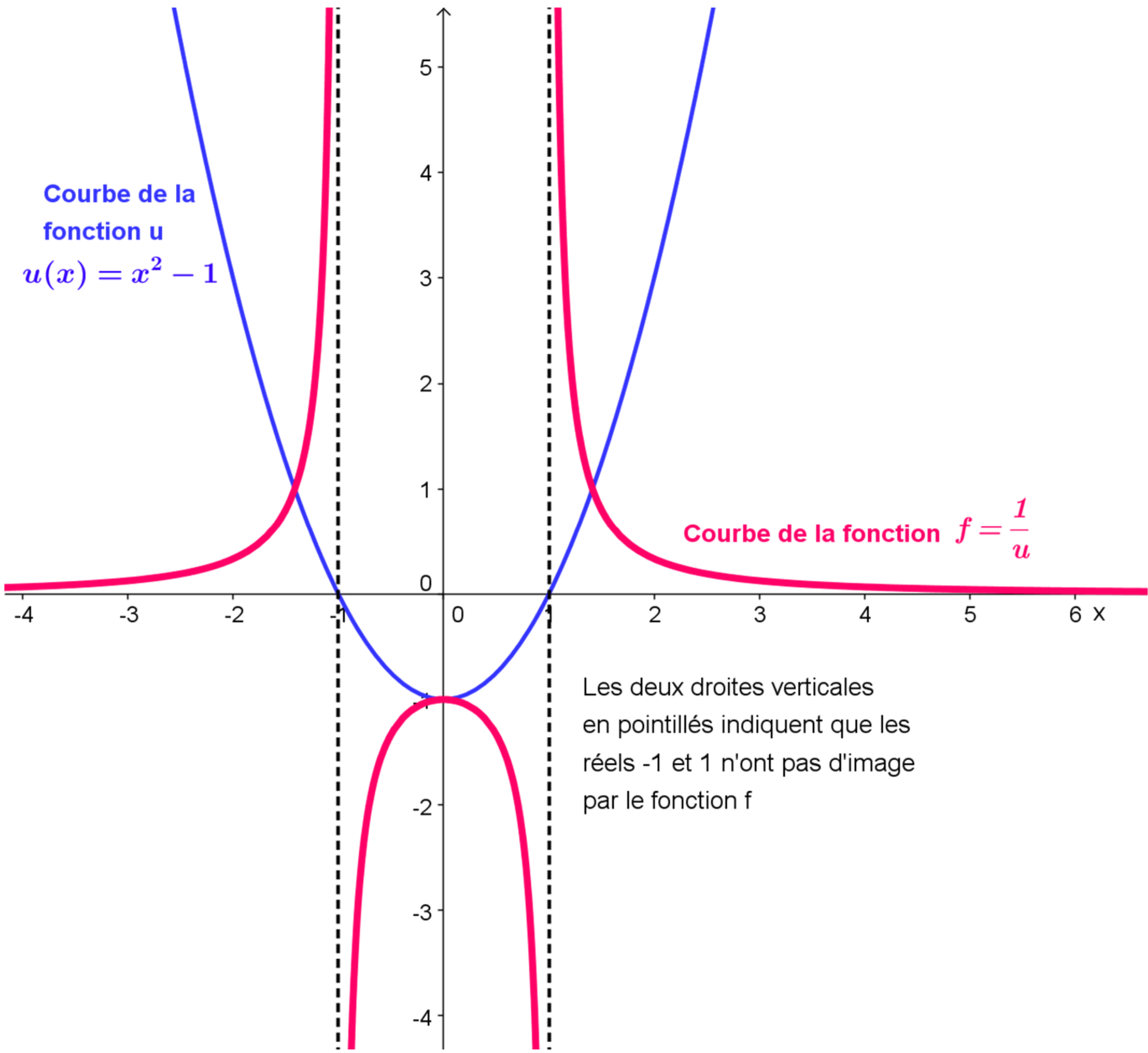
La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = x^2 - 1$

a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $x^2 - 1 \neq 0$ soit sur
D =] -∞ ; - 1 [∪] − 1 ; 1 [∪] 1 ; + ∞[

b) La fonction u (fonction trinôme) est strictement décroissante sur les intervalles] -∞ ; - 1 [et] -1 ; 0] donc f est strictement croissante sur ces intervalles.

La fonction u (fonction trinôme) est strictement croissante sur les intervalles [0 ; 1[et] 1 ; + ∞ [) donc f est strictement décroissante sur ces intervalles.

c) Courbes :



Courbe de la
fonction u
$u(x) = x^2 - 1$
Courbe de la fonction $f = \frac{1}{u}$
Les deux droites verticales
en pointillés indiquent que les
réels -1 et 1 n'ont pas d'image
par le fonction f
x
5
4
3
2
1
0
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Exemple plus complexe utilisant plusieurs fiches de cours différentes

Etude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-|x|+4}}$

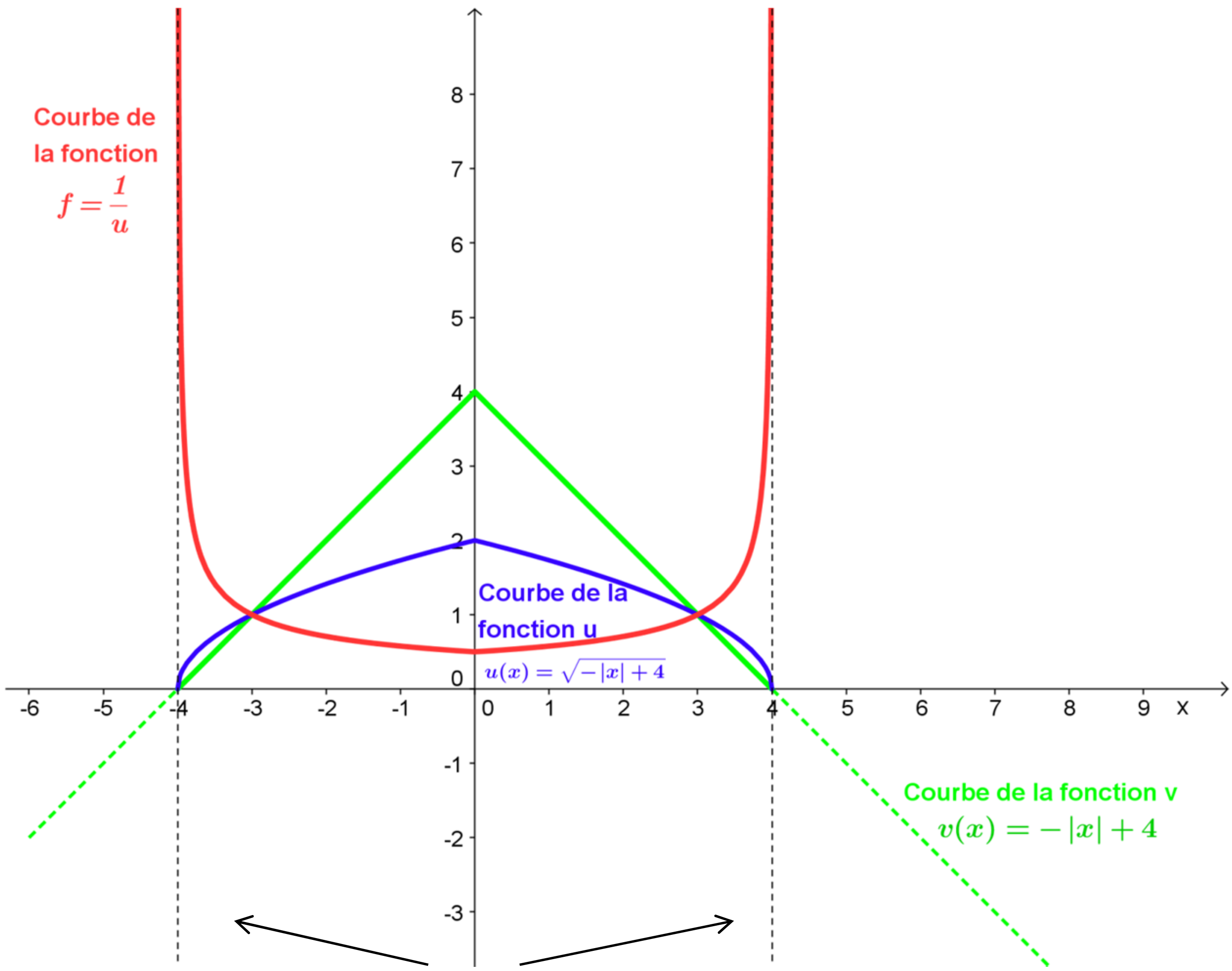
La fonction f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = \sqrt{-|x|+4}$

a) La fonction u n'est définie que sur l'ensemble où $-|x|+4 \geq 0$ soit
D = [- 4 ; 4]
La fonction f est définie sur l'ensemble où $u(x) \neq 0$ soit $x \neq -4$ et $x \neq 4$ donc finalement f est définie sur l'intervalle] – 4 ; 4 [

b) La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle]-4 ; 0] puisqu'elle varie comme la fonction v définie par $v(x) = -|x|+4$
(voir les fiches de cours fonctions racine carrée de u, valeur absolue, $u + \lambda$ et λu) donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

c) La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 4[puisqu'elle varie comme la fonction v définie par $v(x) = -|x|+4$ (voir les fiches de cours fonctions valeur absolue, $u + \lambda$ et λu) donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

d) Courbes :



Les deux droites verticales en pointillées indiquent que les réels -4 et 4 n’ont pas d’image par f