Fonctions $\sqrt{u}$

I) Fonction $\sqrt{u}$

1) Définition

Soit une fonction u définie sur un ensemble D et positive ou nulle sur D (c'est à dire que pour tout $x \in$ D on a $u(x) \geq 0$).

La fonction $\sqrt{u}$ est définie pour tout $x \in$ D par :

$\boldsymbol{x \mapsto (\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}}$

Exemples

1°) Si u est la fonction $u(x) = 3x + 1$ sur D = $[-\frac{1}{3} ; +\infty[$ alors $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{3x+1}$

2°) Si u est la fonction $u(x) = x^2 - 4$ sur D = $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$

alors $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

2) Etude

Soit une fonction u définie sur un ensemble D, positive ou nulle sur D et monotone sur l'intervalle I (I $\subset$ D).

La fonction $\sqrt{u}$ a sur I le même sens de variation que la fonction u.

Démonstration :

1^er^ cas :

Supposons la fonction u strictement croissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x < y$ alors $u(x) < u(y)$

u étant positive sur I, $\sqrt{u}$ est définie sur I

La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante on a

$\sqrt{u(x)} < \sqrt{u(y)}$, c'est-à-dire : $(\sqrt{u})(x) < (\sqrt{u})(y)$

Ce qui prouve que la fonction $\sqrt{u}$ est, elle aussi, croissante sur I.

2^ème^ cas :

Supposons la fonction u strictement décroissante sur I :

Pour tout nombre x et y de I, si $x < y$ alors $u(x) > u(y)$

u étant positive sur I, $\sqrt{u}$ est définie sur I

La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante on a

$\sqrt{u(x)} > \sqrt{u(y)}$, c'est-à-dire : $(\sqrt{u})(x) > (\sqrt{u})(y)$

Ce qui prouve que la fonction $\sqrt{u}$ est strictement décroissante sur I.

On dit que les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

3) Exemples

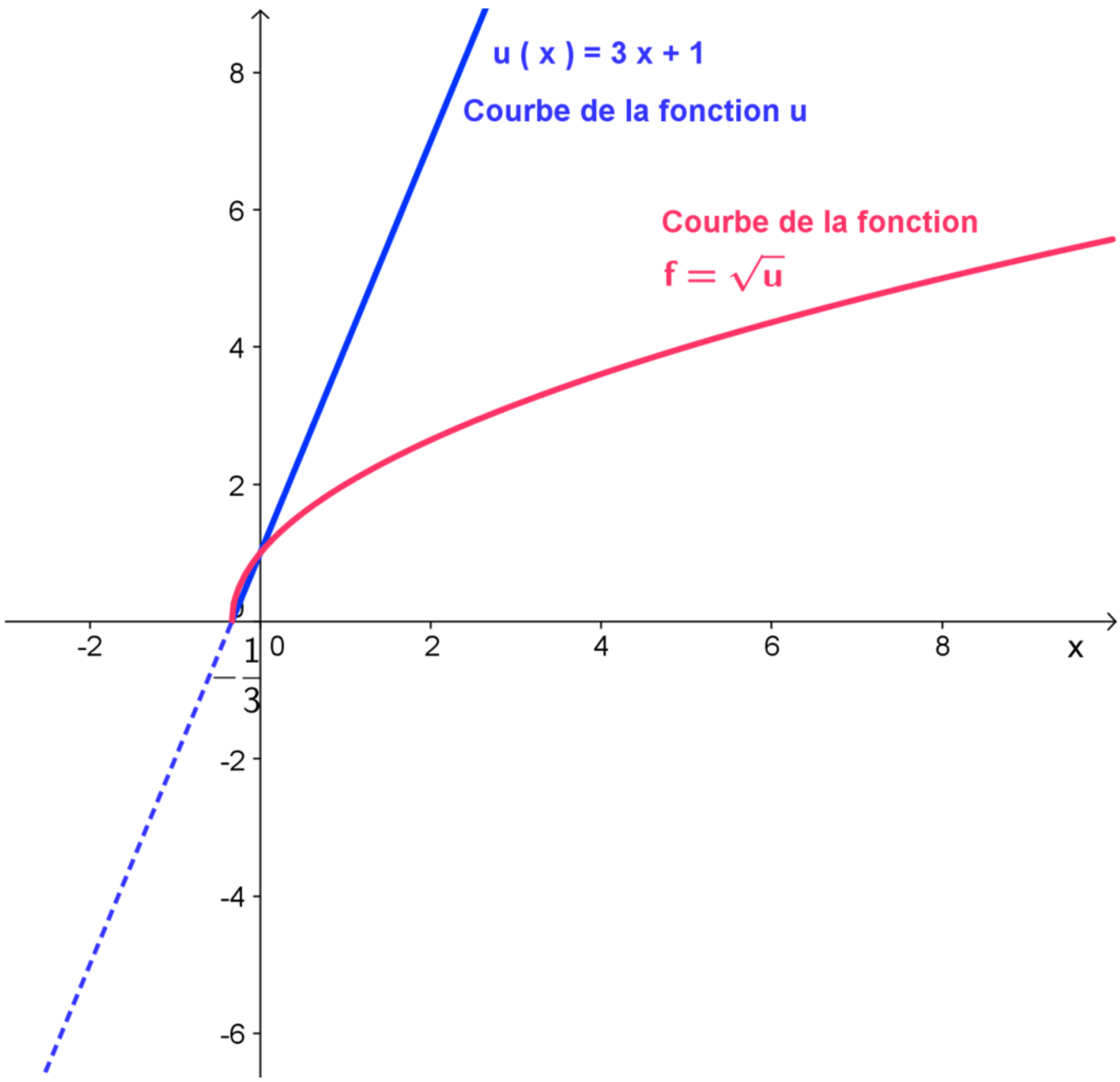
1°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$

a) La fonction f est de la forme $f = \sqrt{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = 3x + 1$

b) La fonction f est définie sur l'ensemble où $3x + 1 \geq 0$ soit sur D =$[-\frac{1}{3} ; +\infty[$

La fonction u est strictement croissante sur D donc f est aussi strictement croissante sur D

c) Courbes :



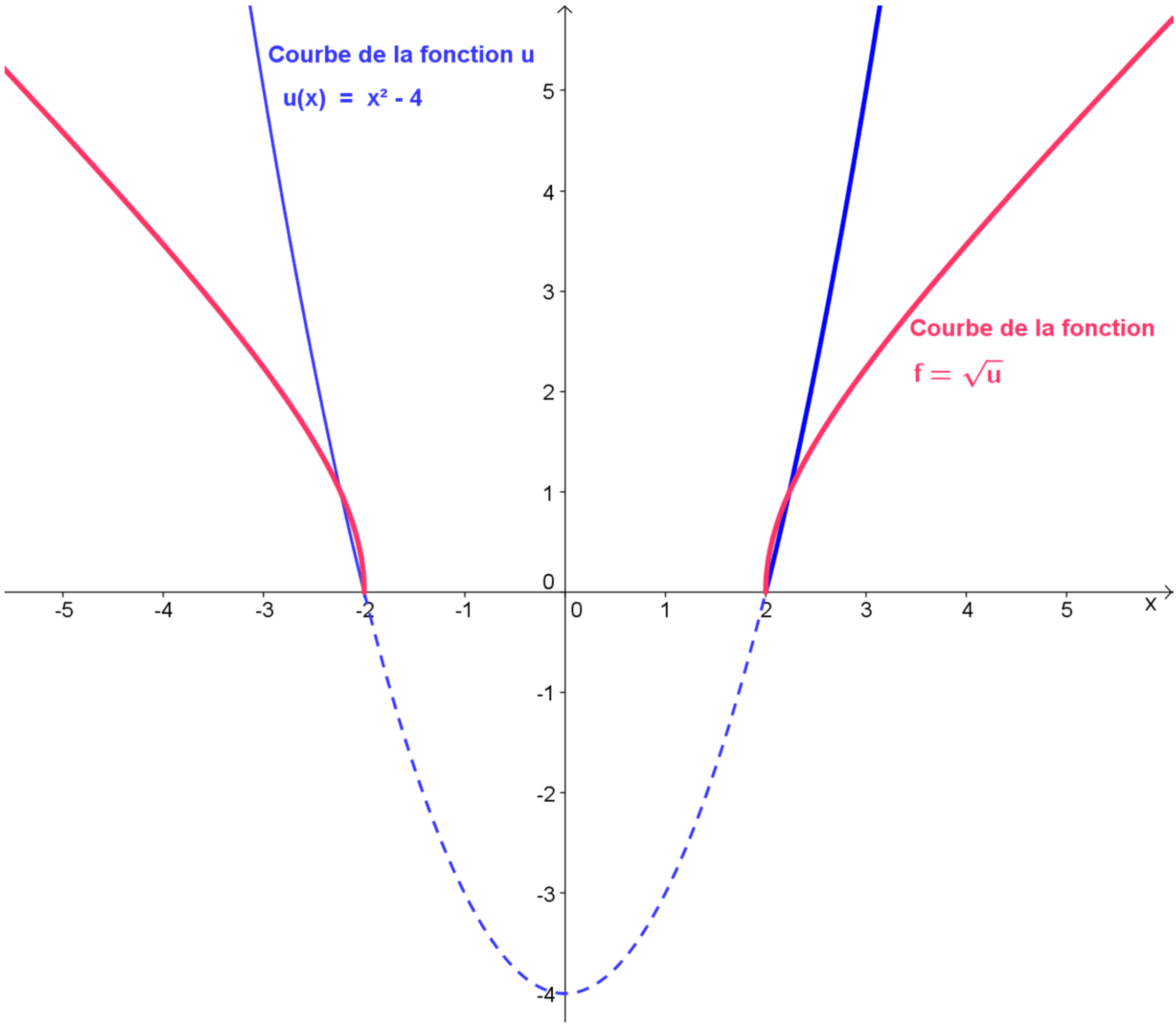
2°) Etude de la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{x^2-4}$

La fonction f est de la forme $f = \sqrt{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = x^2 - 4$

a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $x^2 - 4 \geq 0$ soit sur
D =] -∞ ; - 2] ∪ [2 ; + ∞[(Pour le signe $x^2 - 4$ voir la fiche : signe du trinôme)

b) La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle] -∞ ; - 2] donc f est aussi strictement décroissante sur cet intervalle.
La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; + ∞[donc f est aussi strictement croissante sur cet intervalle.

c) Courbes



Exemple plus complexe utilisant plusieurs fiches de cours différentes

Etude de la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{-|x|+3}$

La fonction f est de la forme $f = \sqrt{u}$ avec u définie pour tout x par $u(x) = -|x| + 3$

a) La fonction f est définie sur l'ensemble où $-|x| + 3 \geq 0$ soit sur D =[- 3 ; 3]

b) La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle]-3 ; 0] donc f est aussi strictement croissante sur cet intervalle.
La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 3[donc f est aussi strictement croissante sur cet intervalle.
(Voir cours sur les fonctions $u + \lambda$ et λu et valeur absolue.)

c) Courbes