Fonction valeur absolue

I) Définition

On appelle fonction valeur absolue, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout réel x associe le réel noté $|x|$ tel que :

• Si x est positif ou nul $|x| = x$

• Si x est négatif $|x| = -x$ (l'opposé de x)

On notera dans la suite la fonction telle que $f(x) = |x|$

On notera f la fonction qui, à x, associe $|x|$.

Exemples :

$|4| = 4$; $|-3| = 3$; $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$

$|x-2| = x-2$ si $x \geq 2$ et $|x-2| = -x+2$ si $x \leq 2$

Propriétés :

- $|x| \geq 0$ pour tout x réel
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

II) Etude

1) Variations de f sur $\mathbb{R}$

D'après la définition de la fonction f on a sur $]-\infty\ ;\ 0]$ $f(x) = -x$
et sur $[0\ ;\ +\infty[$ $f(x) = x$ de là :

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2) Tableau de variations et courbe :

a) Tableau de variations :

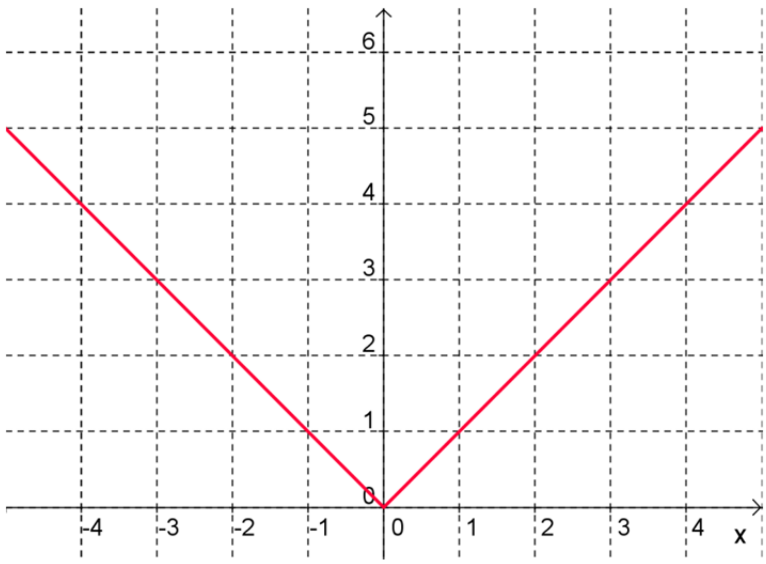
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) Courbe

Remarques :

• La courbe de la fonction *f* coïncide sur $]-\infty\ ;\ 0]$ avec la demi droite d'équation $y = -x$ et sur $[0\ ;\ +\infty[$ avec la demi droite d'équation $y = x$

• La courbe de la fonction *f* admet donc (en repère orthogonal) l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. La fonction *f* est dite paire.



III) Compléments

1) Equations et inéquations:

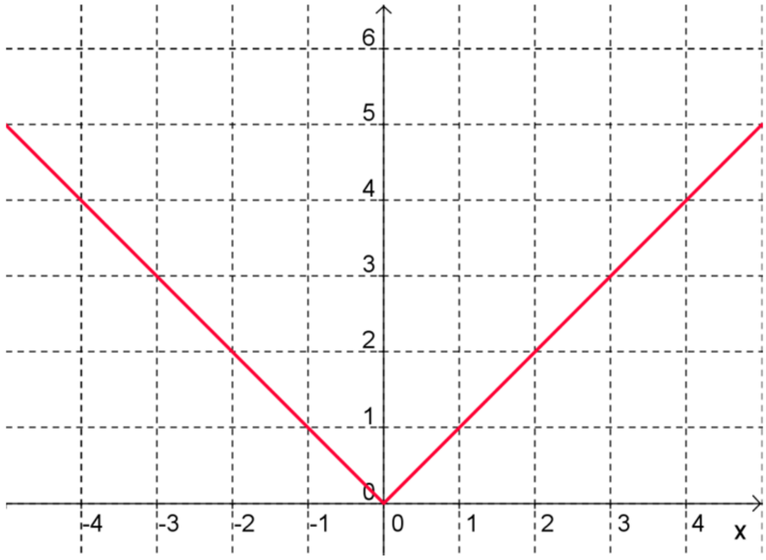
a) Equation $|x| = k$

• Si k est strictement négatif cette équation n'a aucune solution

• Si $k = 0$ cette équation a une unique solution $x = 0$

• Si k est strictement positif cette équation a deux solutions $x = k$ ou $x = -k$

Illustration :



Exemples :

1°) Résoudre l'équation $|x| = 5$
Les solutions de cette équation sont $x = 5$ ou $x = -5$

2°) Résoudre l'équation $|3x - 5| = 4$
Cette équation équivaut à $3x - 5 = 4$ ou $-(3x - 5) = 4$ d'où ses solutions sont :

$$x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

b) Equation $|x| = |y|$

Cette équation équivaut à $x = y$ ou $x = -y$

Exemple :

Résoudre l'équation $|2x + 4| = |5 - x|$

Cette équation équivaut à $2x + 4 = 5 - x$ ou $2x + 4 = -(5 - x)$

Soit encore à $3x = 1$ ou $x = -9$

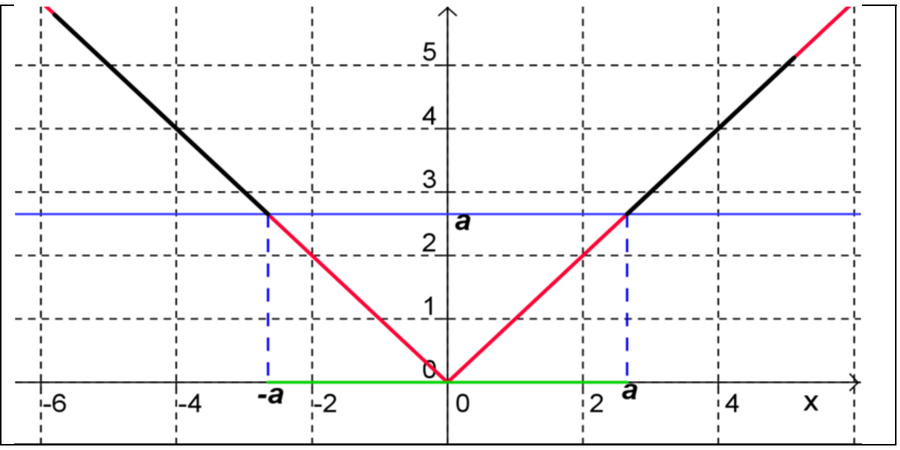
Les solutions sont donc $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -9$

c) Inéquations $|x| \leq a$ et $|x| \geq a$

• Inéquation $|x| \leq a$

• Si $a < 0$ l'inéquation ***n'a aucune solution*** car $|x|$ est positif ou nul

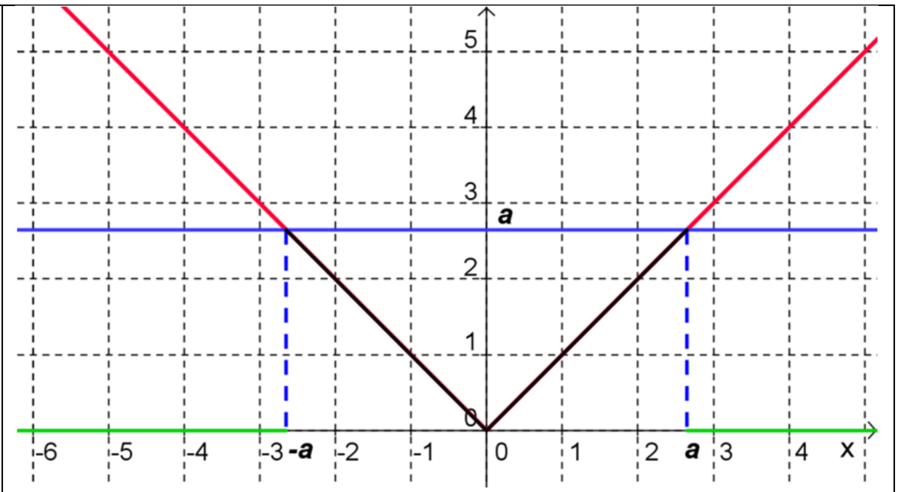
• Si $a \geq 0$ l'inéquation a pour ensemble de solutions ***l'intervalle [- a ; a]***



• Inéquation $|x| \geq a$

• Si $a < 0$ l'inéquation ***a pour solutions l'ensemble*** $\mathbb{R}$ car $|x|$ est positif ou nul

• Si $a \geq 0$ l'inéquation a pour ensemble de solutions ***l'ensemble***
] − ∞ ; − a[∪] a ; +∞[



Exemples :

1°) Résoudre l'inéquation $|x| \leq 4$ Solutions : $x \in [-4 ; 4]$

2°) Résoudre l'inéquation $|x| \geq -2$ Solutions : $\mathbb{R}$

3°) Résoudre l'inéquation $|x| \leq -1$ Solutions : $\varnothing$

4°) Résoudre l'inéquation $|x| \geq \frac{3}{5}$ Solutions : $x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5} ; +\infty\right[$

5°) Résoudre l'inéquation $|2x - 1| \leq 5$

Cette inéquation est équivalente à l'encadrement $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$

Soit $-2 \leq x \leq 3$ Solutions : $x \in [-2 ; 3]$

6°) Résoudre l'inéquation $|3x + 4| \geq 6$

Cette inéquation est équivalente à $3x + 4 \leq -6$ ou $3x + 4 \geq 6$

Soit $x \leq -\frac{10}{3}$ ou $x \geq \frac{2}{3}$ Solutions : $x \in \left]-\infty ; -\frac{10}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$