Probabilités-Variable aléatoire

I) Variable aléatoire discrète

1) Exemples

Exemple 1

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On lance ce dé

L'ensemble des issues est Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$

On convient que si la face 1 apparaît on gagne 5 € sinon on perd 2 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 5 et – 2 (une perte étant un « gain » négatif)

La probabilité que X prenne la valeur 5 est $\frac{1}{6}$ et celle qu'elle prenne la valeur – 2 est $\frac{5}{6}$

On écrit p(X = 5) = p ({1}) = $\frac{1}{6}$ et p(X = – 2) = p ({2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }) = $\frac{5}{6}$

Exemple 2

Considérons une pièce de monnaie bien équilibrée

On lance deux fois de suite cette pièce

En notant P « on a obtenu pile » et F « on a obtenu face », l'ensemble des issues est Ω = { PP ; PF ; FP ; FF }

Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{4}$

On convient que chaque fois que l'on obtient « pile » on gagne 3 € et que chaque fois que l'on obtient « face » on perd 1 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 6 (pour PP) , 2 pour PF ou FP et – 2 pour FF

La probabilité que X prenne la valeur 6 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = 6) = $\frac{1}{4}$

La probabilité que X prenne la valeur 2 est $\frac{1}{2}$ on note p (X = 2) = $\frac{1}{2}$

La probabilité que X prenne la valeur – 2 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = – 2) = $\frac{1}{4}$

En général, on résume ces résultats dans un tableau :

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) Définition

On considère un ensemble fini Ω et une loi de probabilité p sur Ω

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$

Si $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_r}$ désignent les valeurs prises par X, on note « X = $\boldsymbol{x_i}$ » l'événement « X prend la valeur $\boldsymbol{x_i}$ »

On définit une nouvelle loi de probabilité associée à X, par la donnée des réels $\boldsymbol{x_i}$ et des probabilités $\boldsymbol{p_i}$ = P (X = $\boldsymbol{x_i}$) pour $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{r}$

Exemple 3:

Un sac contient 15 jetons bleus, 10 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons noirs, tous indiscernables au toucher.

Un joueur extrait au hasard un jeton de ce sac et note sa couleur : B pour bleu, R pour rouge, V pour vert et N pour noir.

Il marque 3 points si le jeton est rouge, 5 points si le jeton est vert, mais perd 1 point si le jeton est bleu et perd 3 points si le jeton est noir.

Soit G la variable aléatoire qui donne le nombre de points (positif ou négatif) obtenu par le joueur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable G.

Solution :

Tous les jetons ayant la même chance d'être tirés, on a :

Le jeton tiré est :	Bleu	Rouge	Vert	Noir
Probabilités :	$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$	$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
Nombre de points marqués :	-1	3	5	-3

On a donc la loi de probabilité de la variable aléatoire G , en notant n_i les valeurs prises par G :

n_i	– 3	– 1	3	5
p_i = P(G = n_i)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

II) Espérance,variance,écart type

1) Définitions

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité ($\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{p_i}$) $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{r}$
On appelle :

• Espérance de X le nombre noté E(X) défini par

E(X) = $\boldsymbol{p_1 x_1} + \boldsymbol{p_2 x_2} + \ldots .. + \boldsymbol{p_r x_r}$ noté aussi E(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} \boldsymbol{p_i}\ \boldsymbol{x_i}$

• Variance de X le nombre noté V(X) défini par

V(X) = $\boldsymbol{p_1}(\boldsymbol{x_1} - \mathbf{E(X)})^2 + \boldsymbol{p_2}(\boldsymbol{x_2} - \mathbf{E(X)})^2 + \ldots + \boldsymbol{p_r}(\boldsymbol{x_r} - \mathbf{E(X)})^2$ noté aussi

V(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} \boldsymbol{p_i}\ (\boldsymbol{x_i} - \mathbf{E(X)})^2$

• Ecart type de X le nombre noté σ(X) défini par

σ(X) = $\sqrt{\mathbf{V(X)}}$

Exemples :

En reprenant les trois exemples vus plus haut

Exemple 1 :

E(X) = 5 x $\frac{1}{6}$ + (-2) x $\frac{5}{6}$ = $-\frac{5}{6}$

V(X) =$\frac{1}{6}$ (5 – ($-\frac{5}{6}$)^2 + $\frac{5}{6}$ (-2 – ($-\frac{5}{6}$)^2 = $\frac{245}{36}$ ≈ 6,81

σ(X) = $\sqrt{\frac{245}{36}}$ ≈ 2,61

Exemple 2 :

E(X) = 6 x $\frac{1}{4}$ + 2 x $\frac{1}{2}$ - 2 x $\frac{1}{4}$ = 2

V(X) =$\frac{1}{4}$ (6 − 2)² + $\frac{1}{2}$ (2 − 2)² + $\frac{1}{4}$ (−2 −2)² = 4 + 4 = 8

σ(X) = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Exemple 3

Les calculs donnent :

E(G) = $\frac{17}{15}$

V(G) = $\frac{1571}{225} \approx 6{,}98$

σ(G) = $\sqrt{\frac{1571}{225}} \approx 2{,}64$

2) Remarques

• L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs qu'elle prend en considérant que les probabilités sont les fréquences des valeurs.

• La variance et l'écart type d'une variable aléatoire ont les mêmes définitions que la variance et l'écart type d'une série statistique.

3) Propriétés

Compte tenu de la dernière remarque on a :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité ($\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{p_i}$) $\boldsymbol{1 \leq i \leq r}$
Soit a et b deux réels

$\mathbf{E(a\,X + b) = a\,E(X) + b}$; $\mathbf{V(a\,X + b)} = \boldsymbol{a^2}\,\mathbf{V(x)}$ et $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(aX + b) = |a|\,}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)}$

et

V(x) = $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{i=r} p_i\, x_i^{\,2}} \; \mathbf{-(E(X))^2}$

Remarque :

Lorsqu'une variable aléatoire est définie comme un gain algébrique lors d'un jeu, l'espérance représente le gain moyen après un très grand nombre de parties.
Ainsi une espérance nulle indique un jeu équitable, une espérance négative indique un jeu défavorable au joueur et une espérance positive indique un jeu favorable au joueur.