

Dérivées des fonctions usuelles

I) Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in D$

Si f est dérivable sur D , on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \rightarrow f'(a)$

II) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f :	Dérivable sur :	Fonction dérivée f' :
$f(x) = k (k \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	\mathbb{R}	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$	\mathbb{R}	$f'(x) = a \cos(ax + b)$

III) Dérivées et opérations

1) Somme de deux fonctions

La fonction $u + v$ définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^4$ sur \mathbb{R}

On obtient $f'(x) = 1 + 4x^3$

2°) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 3$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x$

3°) $f(x) = \cos x + \sin x$ sur \mathbb{R}

On obtient $f'(x) = -\sin x + \cos x$

2) Produit d'une fonction par un réel

La fonction ku définie par $(ku)(x) = ku(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(ku)'(x) = ku'(x)$.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 7x^3$ sur \mathbb{R}

On obtient $f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$

2°) $f(x) = \frac{4}{x}$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

3°) $f(x) = 3 \cos x - 5 \sin x$ sur \mathbb{R}
On obtient $f'(x) = -3 \sin x - 5 \cos x$

3) Produit de deux fonctions

La fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^2 \cos x$ sur \mathbb{R}

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$

On obtient $f'(x) = 2x \cos x + x^2 (-\sin x)$

$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$

2°) $f(x) = x^2 \cos x$ sur \mathbb{R}

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$

On obtient $f'(x) = 2x \cos x + x^2 (-\sin x)$

$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$

4 Inverse d'une fonction

La fonction $\frac{1}{v}$ définie par $(\frac{1}{v})(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé

des réels où $v(x) = 0$ ($D \cap \{x \mid v(x) \neq 0\}$) et sa dérivée est définie par:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{1}{x^2+7}$ sur \mathbb{R}

En posant $u(x) = x^2 + 7$ on a $u'(x) = 2x$

On obtient $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+7)^2}$

$$2^\circ) f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

En posant $u(x) = \sin x$ on a $u'(x) = \cos x$

$$\text{On obtient } f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

5) Quotient de deux fonctions

La fonction $\frac{u}{v}$ définie par $(\frac{u}{v})(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé

des réels où $v(x) = 0$ ($D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$) et sa dérivée est définie par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1^\circ) f(x) = \frac{3x+1}{5x-3} \quad \text{sur }]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{3}{5}; +\infty[$$

En posant $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 5x - 3$ on a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{3(5x-3) - 5(3x+1)}{(5x-3)^2} = \frac{-14}{(5x-3)^2}$$

$$2^\circ) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

En posant $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \cos x$ on a $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$

$$\text{On obtient } f'(x) = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6) Tableau récapitulatif

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

<i>Fonction</i>	<i>Dérivable sur</i>	<i>Dérivée</i>
$u + v$	D	$u' + v'$
λu	D	$\lambda u'$
uv	D	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$D \cap \{x / v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$