Fonction valeur absolue

I) Définition

On appelle fonction valeur absolue, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout réel x associe le réel noté $|x|$ tel que :

- **Si x est positif ou nul $|x| = x$**

- **Si x est négatif $|x| = -x$ (l'opposé de x)**

On notera dans la suite la fonction telle que $f(x) = |x|$

On notera f la fonction qui, à x, associe $|x|$.

Exemples :

$|4| = 4$; $|-3| = 3$; $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$

$|x-2| = x-2$ si $x \geq 2$ et $|x-2| = -x+2$ si $x \leq 2$

Propriétés :

- $|x| \geq 0$ pour tout x réel

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$

II) Etude

1) Variations de f sur $\mathbb{R}$

D'après la définition de la fonction f on a sur $]-\infty\ ;\ 0]$ $f(x) = -x$
et sur $[0\ ;\ +\infty[$ $f(x) = x$ de là :

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2) Tableau de variations et courbe :

a) Tableau de variations :

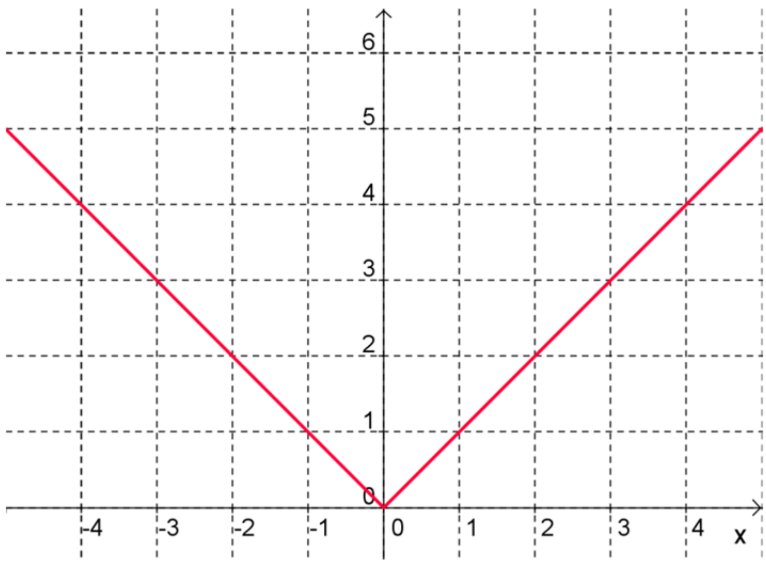
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) Courbe

Remarques :

• La courbe de la fonction *f* coïncide sur $]-\infty\ ;\ 0]$ avec la demi droite d'équation $y = -x$ et sur $[0\ ;\ +\infty[$ avec la demi droite d'équation $y = x$

• La courbe de la fonction *f* admet donc (en repère orthogonal) l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. La fonction *f* est dite paire.



III) Valeur absolue de u

1) Définition

• Soit une fonction u définie sur un ensemble D.
La fonction $|u|$ est définie pour tout $x \in$ D par :
$x \mapsto |u|(x) = |u(x)|$

• Si $u(x) \geq 0$ alors $|u(x)| = u(x)$

• Si $u(x) \leq 0$ alors $|u(x)| = -u(x)$

Exemples:

1°) Si u est la fonction $u(x) = 2x + 8$ sur $\mathbb{R}$ alors $|u|(x) = |2x + 8|$

$2x + 8 \geq 0$ sur [-4 ; +∞ [et $2x + 8 \leq 0$ sur $]-\infty ; -4]$

• Sur $]-\infty ; -4]$: $|u|(x) = 2x + 8$

• Sur [-4 ; +∞ [: $|u|(x) = -(2x + 8) = -2x - 8$

2°) Si u est la fonction $u(x) = x - 4$ sur $\mathbb{R}$ alors $|u|(x) = |x - 4|$

$x - 4 \geq 0$ sur [4 ; +∞ [et $x - 4 \leq 0$ sur $]-\infty ; 4]$

• Sur $]-\infty ; -4]$: $|u|(x) = x - 4$

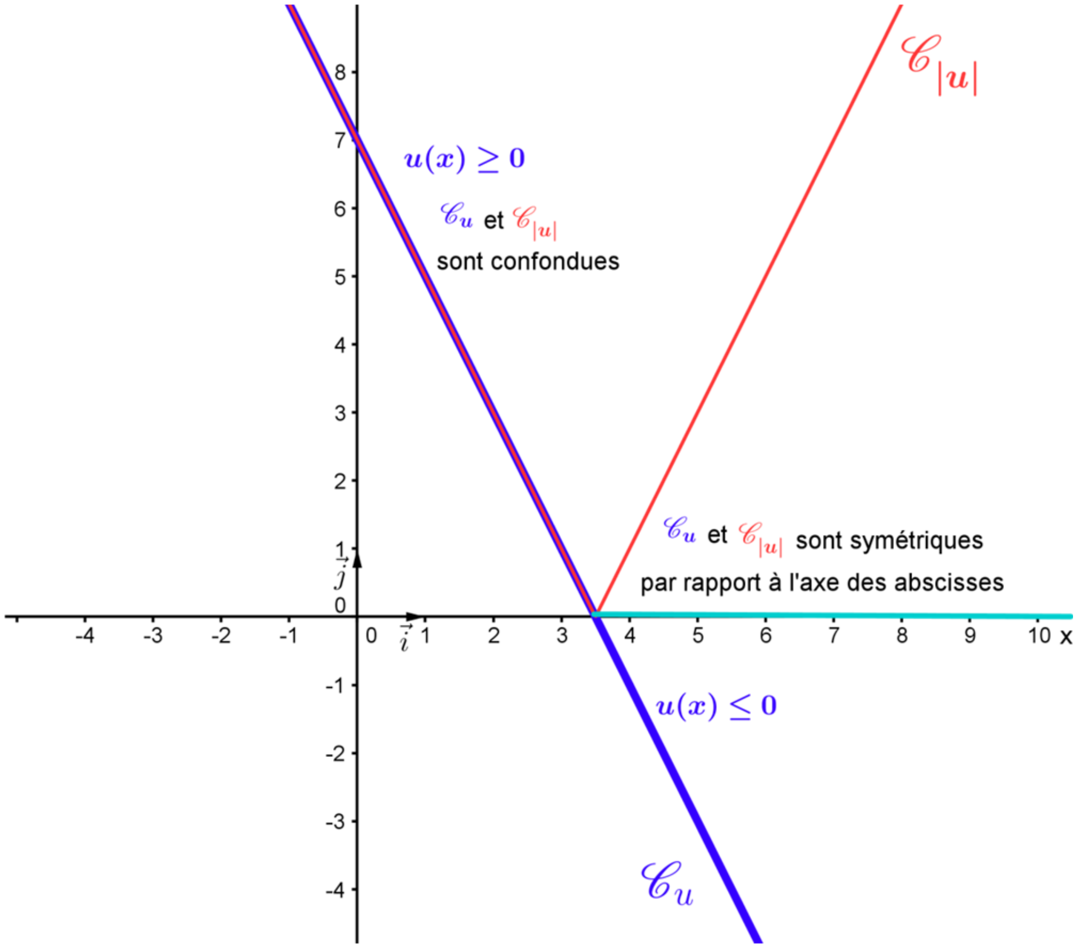
• Sur [-4 ; +∞ [: $|u|(x) = -(x - 4) = -x + 4$

2) Représentation de la fonction $|u|$ à partir de celle de u

• La courbe représentative $\mathcal{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est confondue avec celle de la fonction u sur tous les intervalles où $u(x)$ est positive (c'est à dire lorsque $\mathcal{C}_u$ se situe au dessus de l'axe des abscisses).

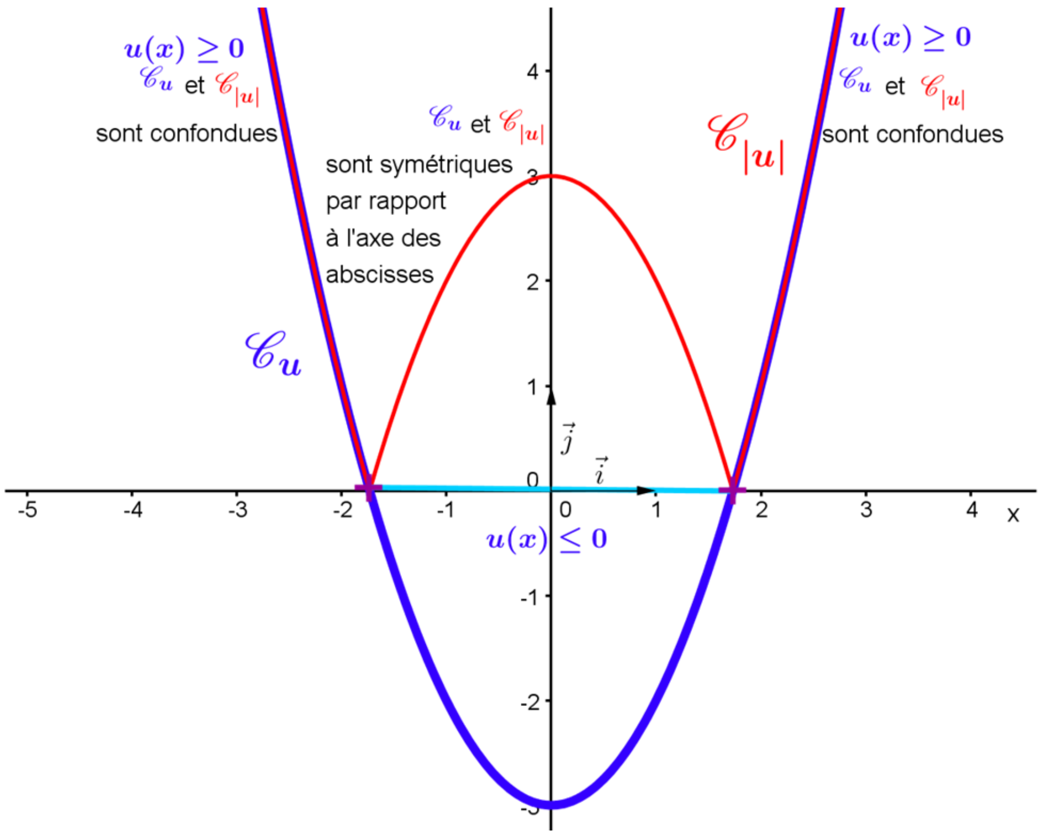
• La courbe représentative $\mathcal{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est symétrique de la courbe $\mathcal{C}_u$ par rapport à l'axe des abscisses sur tous les intervalles où $u(x)$ est négative (c'est à dire lorsque $\mathcal{C}_u$ se situe en dessous de l'axe des abscisses).

Exemple1 :



$u(x) \geq 0$
$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{|u|}$
sont confondues
$\mathscr{C}_{|u|}$
$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{|u|}$ sont symétriques
par rapport à l'axe des abscisses
$u(x) \leq 0$
$\mathscr{C}_u$

Exemple 2 :



$u(x) \geq 0$
$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{|u|}$
sont confondues
$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{|u|}$
sont symétriques
par rapport
à l'axe des
abscisses
$\mathscr{C}_{|u|}$
$u(x) \geq 0$
$\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_{|u|}$
sont confondues
$\mathscr{C}_u$
$u(x) \leq 0$