Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

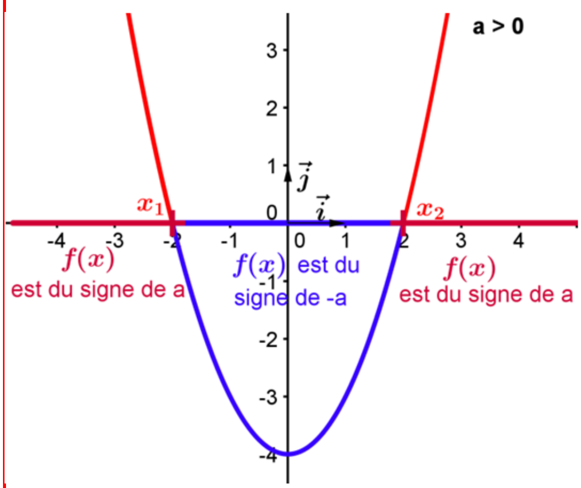
Soit $a x^2 + b x + c$ un polynôme du second degré (a ≠ 0) et
$\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

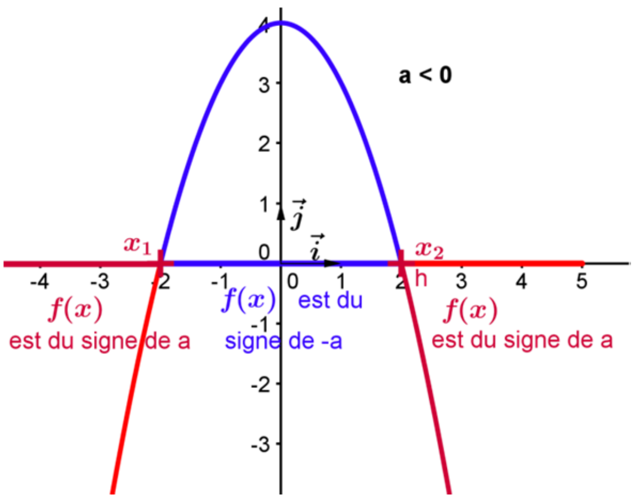
L'existence de solutions pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ du polynôme dépend du signe de Δ.

1) Si Δ > 0

Dans ce cas , l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 distinctes dans ℝ . On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	





Exemples : Etudier le signe des trinômes suivants :

$f(x) = -x^2 + x + 2$ et $g(x) = 2x^2 + x - 1$;

- **Pour f :** $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2$

  $\Delta = 9$ $\qquad x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$

a = -1 donc a < 0 On obtient donc , le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-x^2 + x + 2 \leq 0$ **sur]** $-\infty$ **; -1]** $\cup$ **[2 ;** $+\infty$ **] et** $-x^2 + x + 2 \geq 0$ **sur [-1 ; 2]**

- **Pour** g **:** $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1)$

Δ **= 9** $\qquad x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{4} = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{4} = \dfrac{-1-3}{4} = -1$

a = 2 donc a > 0 On obtient donc , le tableau de signe :

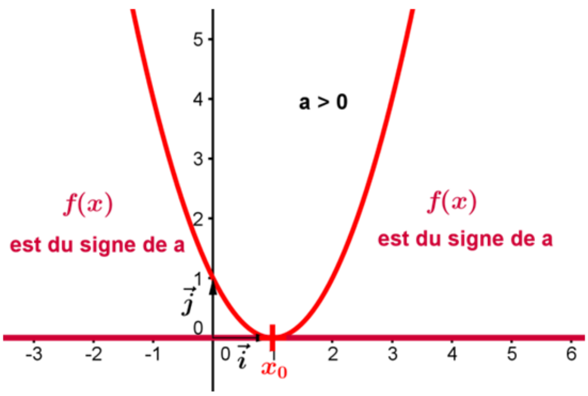
x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

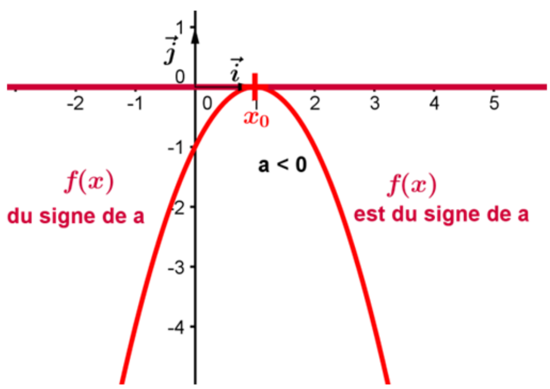
$2x^2 + x - 1 \leq 0$ **sur [-1 ;** $\frac{1}{2}$ **] et** $2x^2 + x - 1 \geq 0$ **sur]** $-\infty$ **; -1]** $\cup$ **[**$\frac{1}{2}$ **;** $+\infty$ **]**

2) Si Δ = 0

Dans ce cas , l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ **admet une solutions** x_0 **dans ℝ .**
On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		**signe de** a	0	**signe de** a	





Exemples : Etudier le signe des trinômes suivants :

$f(x) = 4x^2 - 12\,x + 9$ et $g(x) = -4\,x^2 + 20\,x - 25$;

- **Pour f :** Δ = (-12)² – 4 × 4 × 9

  $\boldsymbol{\Delta}$ **= 0** $\qquad x_1 = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

a = 4 donc a > 0 On obtient donc, le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$\mathbf{4x^2 - 12\,x + 9} \geq$ **0 sur** $\mathbb{R}$

- **Pour g :** Δ = 20² – 4 × (-4) × (-25)

  $\boldsymbol{\Delta}$ **= 0** $\qquad x_1 = \dfrac{-20}{-8} = \dfrac{5}{2}$

a = $-$4 donc a < 0 On obtient donc, le tableau de signe :

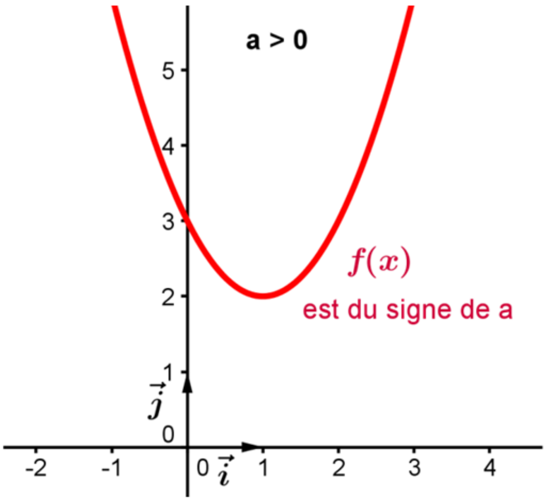
x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

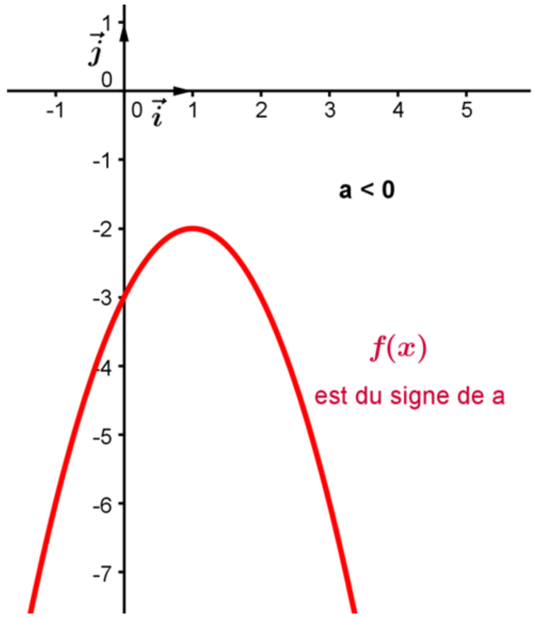
$\mathbf{-4\,x^2 + 20\,x - 25} \leq$ **0 sur** $\mathbb{R}$

2) Si $\Delta < 0$

Dans ce cas , l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	**signe de a**





Exemples : Etudier le signe des trinômes suivants :

$f(x) = x^2 + x + 9$ et $g(x) = -4x^2 + 2x - 8$;

Réponse :

- **Pour f :** Δ = 1² – 4 × 1 × 9

  Δ = -35

L'équation n'a donc pas de solution.

a = 1 donc a > 0 On obtient donc, le tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

$x^2 + x + 9$ **> 0 sur** $\mathbb{R}$

- **Pour g :** Δ = 2² – 4 × (-4) × (-8)

  Δ = -124 L'équation n'a pas de solution.

a = – 4 donc a < 0 On obtient donc, le tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$

$-4x^2 + 2x - 8$ **< 0 sur** $\mathbb{R}$