Statistiques

I) Couple médiane. Intervalle interquatile

1) La médiane

Définition:

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la population en deux effectifs égaux.
Il y a donc autant de valeurs supérieures à la médiane que de valeurs inférieures.

Exemples :

Exemple 1 :

Un boulanger teste les masses (en grammes) de 30 baguettes qu'il vient de fabriquer, il obtient les résultats suivants :

235	235	237	238	238	239	239	239	240	241
241	243	245	247	247	249	250	205	250	250
250	251	251	253	253	255	255	255	257	260

Comme l'effectif total $N = 30$ est pair la médiane est la demi somme de la donnée de rang 15 et la donnée de rang 16 soit : $\frac{247 + 249}{2} = 248$

Exemple 2 :

Le tableau ci-dessous indique la durée (en minutes) de connexion internet par jour de 43 familles interrogées

Durée en minutes	40	60	80	120	180	200	240	300
Effectif	2	9	11	7	5	2	4	3

Comme l'effectif total $N = 43 = 2x21 + 1$ est impair la médiane est la donnée de rang 22 soit 80 minutes

2) Les quartiles

Définition:

On considère une série dont les données sont **rangées dans l'ordre croissant**

Les quartiles sont des données de la série qui la partage en quatre parties à peu près de même effectif.

• Le premier quartile noté Q1, de la série ordonnée est la plus petite valeur de la série telle que 25 % des valeurs soient inférieurs ou égales à Q1

• Le troisième quartile noté Q3, de la série ordonnée est la plus petite valeur de la série telle que 75 % des valeurs soient inférieurs ou égales à Q3

Dans l'exemple 1 précédent portant sur les masses des baguettes le quart de l'effectif étant $\frac{30}{4}$ =7,5 Q_1 est la donnée de rang 8 soit Q_1 = 239 g et Q_3 est la donnée de rang 22 soit Q_3 = 251 g

Dans l'exemple 2 précédent portant sur la durée de connexion internet le quart de l'effectif étant $\frac{43}{4}$ = 10,75 Q_1 est la donnée de rang 11 soit Q_1 = 60 min et Q_3 est la donnée de rang 33 soit Q_3 = 180 min

3) L'écart interquartile

L'écart interquartile est égal à la différence $Q_3 - Q_1$

Dans l'exemple 1 : $Q_3 - Q_1 = 251 - 239 = 12$. L'écart interquartile est 12

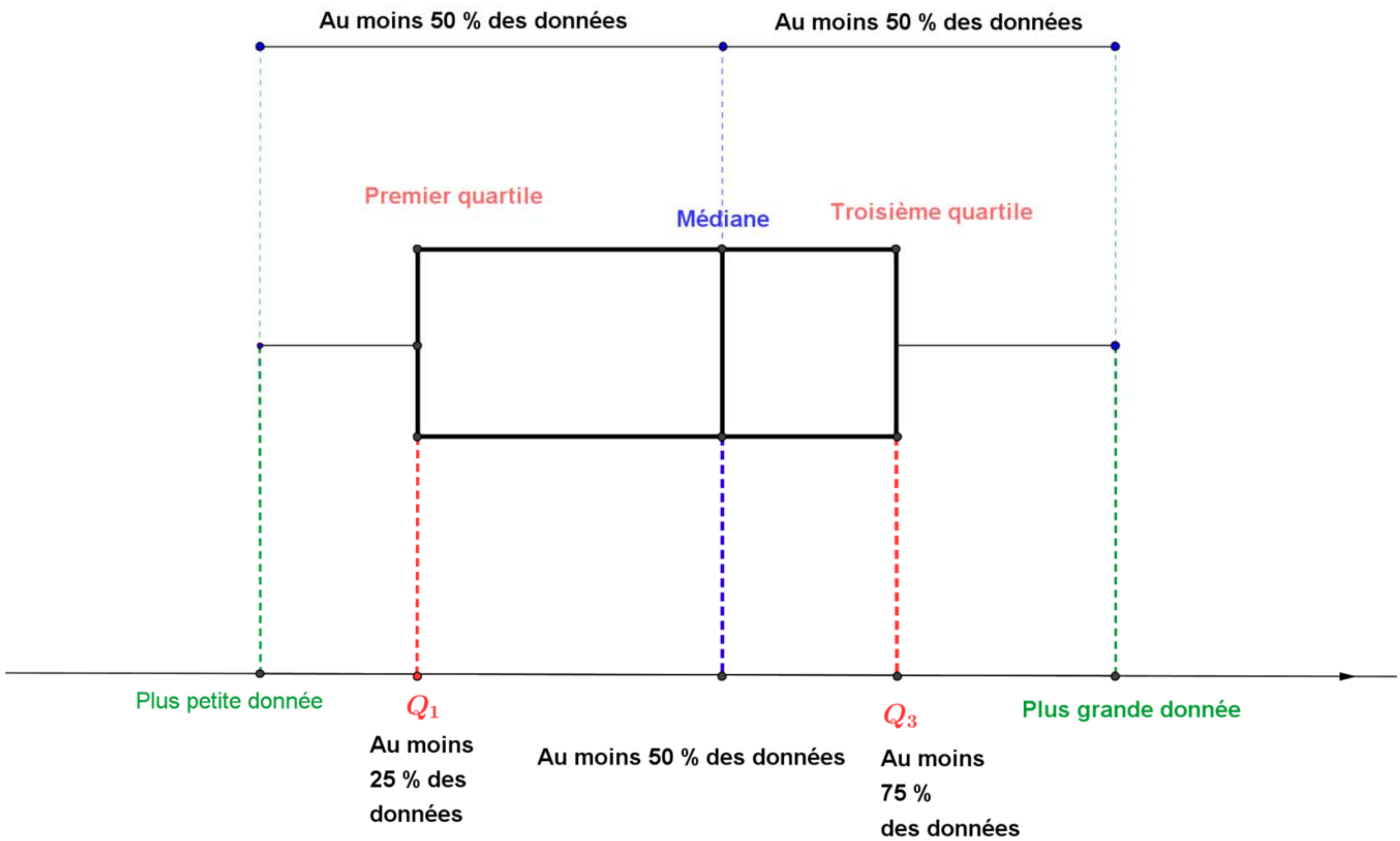
Dans l'exemple 2 : $Q_3 - Q_1 = 180 - 60 = 120$. L'écart interquartile est 120

II) Diagramme en boite

Une série statistique peut être représentée par un diagramme appelé « boite à moustache »

Définition

On appelle diagramme en boite ou boite à moustache d'une série , la représentation graphique ci-dessous. Elle est composée de deux rectangles et de deux segments dont les longueurs correspondent aux paramètres de la série, représentés sur un axe gradué



<u>Remarques :</u>

• Lorsqu'on utilise une calculatrice ce diagramme porte le nom de « Box Plot ».

• Les boites à moustaches sont un moyen simple pour comparer un même caractère sur plusieurs séries statistiques.

Exemple 3

On a relevé les notes de 24 élèves d'une classe lors d'un examen noté sur 100 points

78	79	77	59	57	65	65	67
68	67	59	54	64	68	72	74
72	72	76	77	76	74	77	76

1) Déterminer la médiane et les quartiles de cette série

2) Dessiner la boite à moustache de cette série

3) On peut comparer les résultats de cette classe avec les résultats d'une autre classe dont on sait que la note minimale est 47 , la note maximale est 85 , la médiane est 70, Q_1 est 67 et Q_3 est 76. Tracer sur le même graphique que dans la question 2 la boite à moustache de cette nouvelle série.

4) Que peut-on dire sur les différences entre les deux classes ?

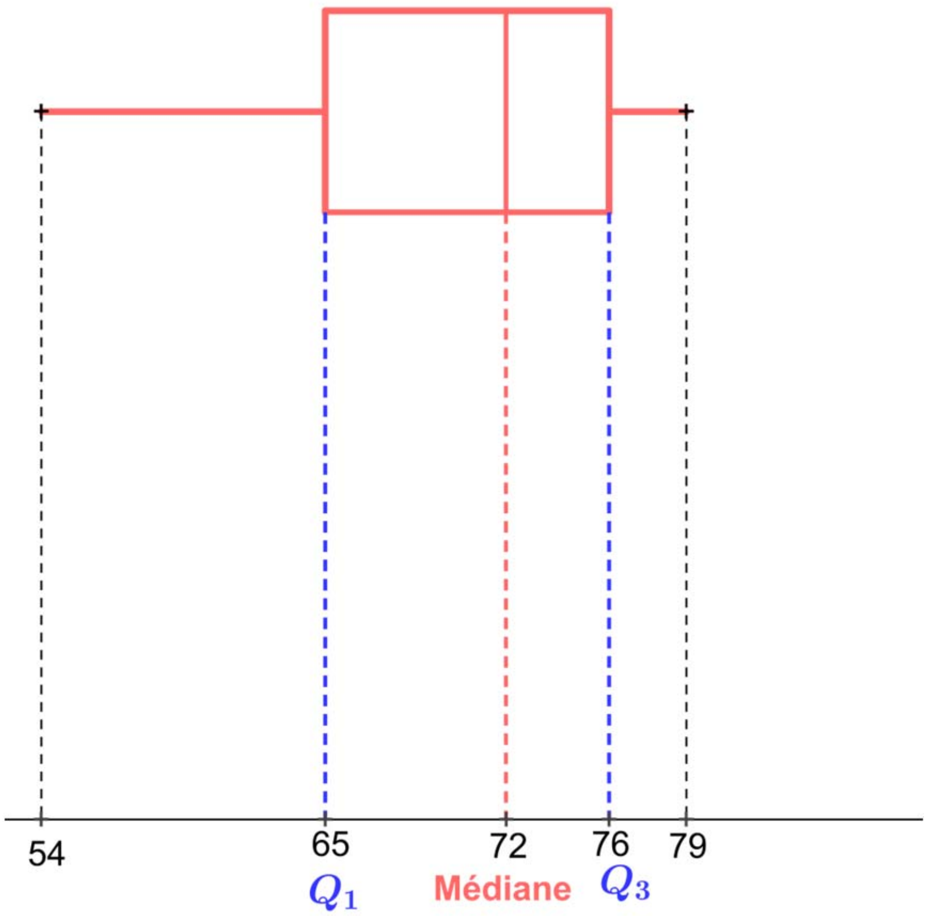
Solution :

1) Trions les données de la série :

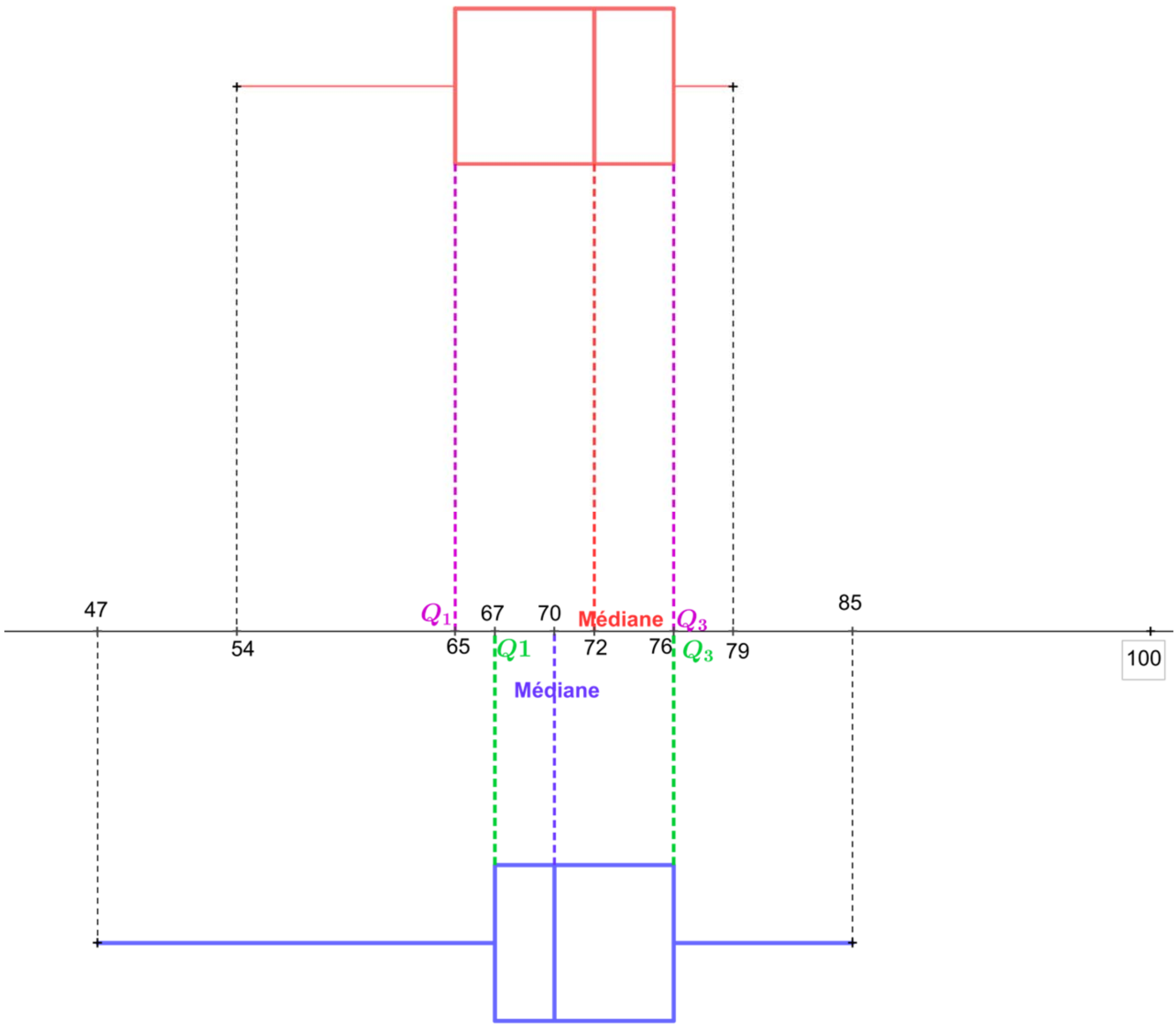
54	57	59	59	64	65	65	67
67	68	68	72	72	72	74	74
76	76	76	77	77	77	78	79

Comme il y a 24 valeurs la médiane est la moyenne entre la $12^{ème}$ et la $13^{ème}$ valeur soit $M = \frac{72+72}{2} = 72$ le premier quartile est la $6^{ème}$ valeur soit $Q_1 = 65$ et le troisième quartile est la $18^{ème}$ valeur $Q_3 = 76$

2)



3)



4) Cette deuxième classe semble un peu plus hétérogène (un minimum inférieur et un maximum supérieur) mais pour 50 % des élèves (l'intérieur des boites) la deuxième classe est plus concentrée (boite moins large).
Pour les deux classes 75 % des élèves sont en dessous de 76 sur 100

III) Couple moyenne écart type

1) Définition de la moyenne (rappel)

Soit la série statistique définie dans le tableau suivant :

Valeur	x_1	x_2	…..	x_p
Effectif	n_1	n_2	…..	n_p
Fréquences	f_1	f_2		f_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ **et** $f_i = \dfrac{n_i}{N}$

La moyenne de cette série statistique est le réel, noté $\overline{x}$, tel que :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

ou en utilisant les fréquences :

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots .. + f_px_p$$

Exemple 1: Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs

taille (en m)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Effectif	8	10	25	32	19	4	2

La taille moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{1{,}5\times8 + 2\times10 + 2{,}5\times25 + 3\times32 + 3{,}5\times19 + 4\times4 + 4{,}5\times2}{100} = 2{,}82$$

Exemple 2 :

Un supermarché a relevé les dépenses (en €) de ses clients en 2 heures un jour donné, les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Dépenses (en €)	[0 ; 30 [	[30 ; 60 [	[60 ; 100 [	[100 ; 120 [
Milieu de classe	15	45	80	110
Effectif	12	25	42	67

Pour calculer la moyenne on détermine les milieux des classes de la distribution puis on effectue le calcul : $\overline{x} = \dfrac{15\times12 + 45\times25 + 80\times42 + 110\times67}{146} \approx 82{,}43$ €

(146 est l'effectif total)

Exemple 3 :

On étudie dans une maternité la taille de 50 nouveaux nés

Taille en cm	47	48	49	50	51	52
Effectif	5	8	12	15	9	1
Fréquence	0,1	0,16	0,24	0,3	0,18	0,02

$\overline{x} = 0{,}1 \times 47 + 0{,}16 \times 48 + 0{,}24 \times 49 + 0{,}3 \times 50 + 0{,}18 \times 51 + 0{,}02 \times 52 = 49{,}36$

2)Variance et écart type (caractéristique de dispersion)

Définition

Soit la série statistique définie dans le tableau suivant :

Valeur	x_1	x_2	.....	x_p
Effectif	n_1	n_2	.....	n_p
Fréquences	f_1	f_2		f_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ **et** $f_i = \frac{n_i}{N}$

Soit $\overline{x}$ la moyenne de cette série .

Le réel V = $\frac{1}{N}[\, n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_i(x_i - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2]$
est appelé variance de cette série statistique.

La racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$ **est l'écart type de cette série.**

La **variance** et **l'écart type** permettent de mesurer la **« dispersion »** des valeurs de la série autour de la moyenne.
Si les valeurs de la série possèdent une unité, l'écart type s'exprime dans la même unité.

Autre formule pour calculer la variance :

V = $\frac{1}{N}[\, n_1{x_1}^2 + n_2{x_2}^2 + \cdots + n_i{x_i}^2 + \cdots . + n_p{x_p}^2] - (\overline{x})^2$

Exemples :

Calculs de la variance et de l'écart type des séries précédentes

1°) Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs

taille (en m)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Effectif	8	10	25	32	19	4	2

La taille moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{1{,}5\times8 + 2\times10 + 2{,}5\times25 + 3\times32 + 3{,}5\times19 + 4\times4 + 4{,}5\times2}{100} = 2{,}82$$

La variance $V = \dfrac{1{,}5^2\times8 + 2^2\times10 + 2{,}5^2\times25 + 3^2\times32 + 3{,}5^2\times19 + 4^2\times4 + 4{,}5^2\times2}{100} - 2{,}82^2$

(on utilise la deuxième formule)

$V = 8{,}395 - 7{,}9524 = 0{,}4426$ et $\sigma = \sqrt{0{,}4426} \approx 0{,}665$ m

2°) On étudie dans une maternité la taille de 50 nouveaux nés

Taille en cm	47	48	49	50	51	52
Effectif	5	8	12	15	9	1
Fréquence	0,1	0,16	0,24	0,3	0,18	0,02

$$\overline{x} = 0{,}1 \times 47 + 0{,}16 \times 48 + 0{,}24 \times 49 + 0{,}3 \times 50 + 0{,}18 \times 51 + 0{,}02 \times 52 = 49{,}36$$

• Disposition pratique de calcul de la variance et de l'écart type (avec la formule de la définition)

Taille en cm (xi)	Effectifs (ni)	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
47	5	$(47 - 49{,}36)^2 = 5{,}5696$	5*5,5696 =27,848
48	8	$(48 - 49{,}36)^2 = 1{,}8496$	8*1.8496 = 14,7968
49	12	$(49 - 49{,}36)^2 = 0{,}1296$	12*0.1296 = 1,5552
50	15	$(50 - 49{,}36)^2 = 0{,}4096$	15*0.4096 = 6,144
51	9	$(51 - 49{,}36)^2 = 2{,}6896$	9*2.6896 =24,2064
52	1	$(52 - 49{,}36)^2 = 6{,}9696$	1*6,9696 = 6,9696
Sommes	50		81,52

$V = \dfrac{81{,}52}{50} = 1{,}6304$ et $\sigma = \sqrt{V} \approx 1{,}277$ cm

• Disposition pratique de calcul de la variance et de l'écart type (avec la deuxième formule)

Taille en cm (xi)	Effectifs (ni)	x_i^2	$n_i x_i^2$
47	5	47^2 =2 209	5* 2 209 = 11 045
48	8	48^2 =2 304	8*2 304 = 18 432
49	12	49^2 =2 401	12*2 401 = 28 812
50	15	50^2 =2 500	15*2 500 = 37 500
51	9	51^2 =2 601	9*2 601 = 23 409
52	1	52^2 = 2 704	1*2 704 = 2 704
Sommes	50		121 902

V = $\frac{121\,902}{50}$ – $49{,}36^2$ = 1,6304 et σ = $\sqrt{V}$ ≈ 1,277 cm

Remarques

1) Vous devez savoir obtenir la moyenne et l'écart type d'une série statistique à l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel
2) L'écart type d'une série donne une idée de la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne. Il possède la même unité que les valeurs de la série.

IV) Choix d'un couple (moyenne, écart type) ou (médiane, écart interquartile) pour l'étude d'une série

Vous avez étudié en classe de seconde la médiane et l'intervalle interquartile d'une série statistique.
Ce couple (médiane, intervalle interquartile) comme le couple (moyenne, écart type) permettent d'étudier une série statistique ou comparer plusieurs séries statistiques.

Le couple (moyenne, écart type) est néanmoins sensible aux valeurs extrêmes de la série alors que le couple (médiane, intervalle interquartile) ne l'est pas.

Seule une étude précise permet de déterminer le couple le plus approprié à chaque série.

Exemple :

Dans une entreprise qui doit fabriquer des supports en bois de 30 cm, on étudie les productions de 2 employés sur 100 supports fabriqués.
On obtient les résultats suivants :

Employé A :

Longueur en cm	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Nombre de supports	2	7	13	18	20	17	16	5	2

Employé B :

Longueur en cm	26	27	28	29	30	31	32	33	85
Nombre de supports	2	2	3	16	48	21	5	2	1

Si on étudie les valeurs caractéristiques des deux séries on obtient :

	Médiane	Q1	Q3	Q3 – Q1	Moyenne	Ecart type
Employé A	30	29	31	2	29,99	1,797
Employé B	30	30	31	1	30.56	5.595

Si on observe le couple (médiane, intervalle interquartile) l'employé B semble être le plus précis, mais si on observe le couple (moyenne, écart type) c'est l'employé A qui est le meilleur.

On voit en observant les tableaux de résultats que l'employé B a raté une pièce si on retire cette donnée « aberrante » les résultats de la série de l'employé B deviennent :

Médiane	Q1	Q3	Q3-Q1	Moyenne	Ecart type
30	30	31	1	30,01	1,176

Ces résultats font de cet employé le plus régulier des deux. Reste à savoir pourquoi il a raté cette pièce ….. !