

Équation du second degré

I) Définition

Une équation du second degré est de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$
avec $a \neq 0$.

II) Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ et s'appelle le **discriminant** du trinôme :
 $ax^2 + bx + c$

On a donc $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

Exemples :

- Calculer le discriminant de $3x^2 - 5x + 1$:

Réponse : $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(1)$

$$\Delta = 13$$

- Calculer le discriminant de $x^2 - 3x + \frac{3}{2}$:

Réponse : $\Delta = 3$

- Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$:

Réponse : $\Delta = -9$

III) Equation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ :

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
<p>l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans \mathbf{R} :</p> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ <p>et</p> $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ <p>Le trinôme se factorise de la façon suivante :</p> $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	<p>l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique dans \mathbf{R} :</p> $x_0 = \frac{-b}{2a}$ <p>Le trinôme se factorise de la façon suivante :</p> $f(x) = a(x - x_0)^2$	<p>l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans \mathbf{R}</p> <p>$f(x)$ n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.</p>

Remarques :

- On appelle **racine** du polynôme $ax^2 + bx + c$ toute solution de l'équation :
 $ax^2 + bx + c = 0$.
- Lorsque l'équation admet une solution unique x_0 , c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$, on dit que x_0 est une solution double, car elle a deux fois la même solution et $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Exemples :

Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines ; si oui en donner une factorisation.

- $f(x) = x^2 - x - 6$;
- $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$;
- $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
- $j(x) = x^2 - x + 1$;

Réponses :

- Pour f :

$$\Delta = 25$$

le polynôme admet 2 racines -2 et 3 ,
on a donc : $f(x) = (x + 2)(x - 3)$;

- Pour g :

Tout d'abord factorisons par 5 : $g(x) = 5(x^2 - 8x + 7)$

$$\Delta = 36$$

le polynôme admet 2 racines : 1 et 7 ,
on a donc : $g(x) = 5(x - 1)(x - 7)$;

- Pour h :

$$\Delta = 0$$

le polynôme admet une racine $\frac{1}{3}$,

on a donc : $h(x) = 9(x - \frac{1}{3})^2$;

- Pour j :

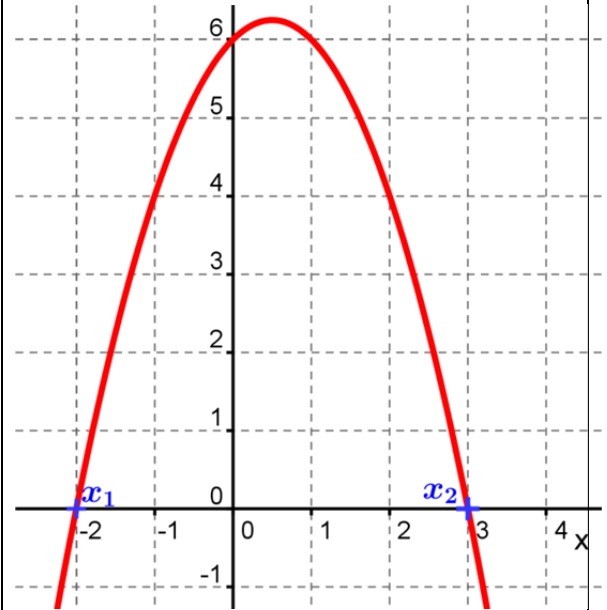
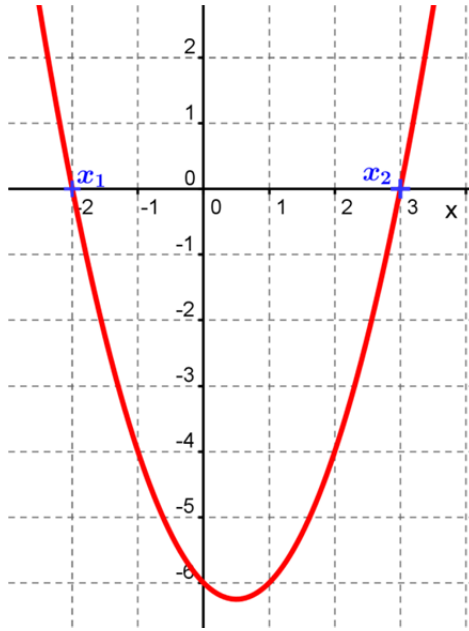
$$\Delta = -3$$

le polynôme n'admet aucune racine dans \mathbb{R} et n'est pas factorisable.

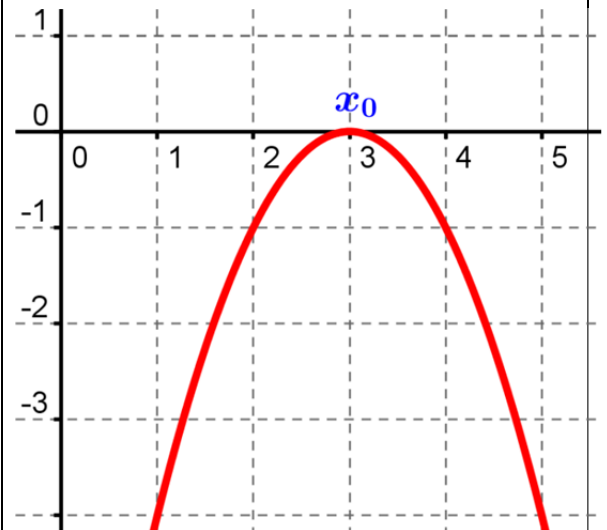
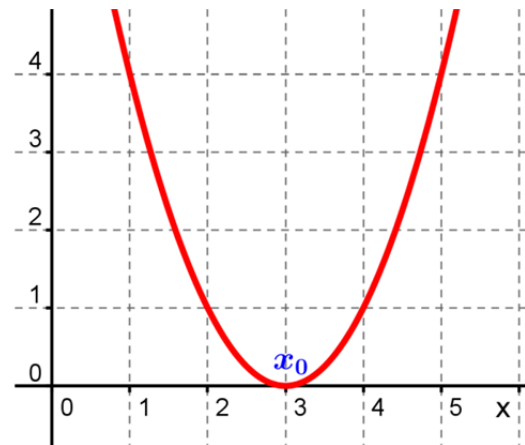
IV) Interprétation graphique

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant :

Si $\Delta > 0$



Si $\Delta = 0$



Si $\Delta < 0$

