

# Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

## I) Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Exemples :

**Exemple 1:**

$$\text{Soit } f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\text{Alors } f'(x) = 2x + 1$$

**Exemple 3:**

$$\text{Soit } h(x) = 5x^2 - 3x - 6$$

$$h'(x) = 2 \times 5x - 3$$

$$\text{Alors } h'(x) = 10x - 3$$

**Exemple 2:**

$$\text{Soit } g(x) = -x^2 + 5$$

$$\text{Alors } g'(x) = -2x$$

**Exemple 4:**

$$\text{Soit } i(x) = -7x^2 + 4x - 1$$

$$i'(x) = -7 \times 2x + 4$$

$$\text{Alors } i'(x) = -14x + 4$$

## II) Application à l'étude des variations d'une fonction

### 1) Théorème

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré 2:

- Si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x$  d'un intervalle  $I$ , alors  $f$  est croissante sur cet intervalle.
- Si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x$  d'un intervalle  $I$ , alors  $f$  est décroissante sur cet intervalle.

### Exemples :

#### Exemple 1:

Soit  $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors  $f'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = 0$  a pour solution  $2x + 1 = 0$  soit  $x = -\frac{1}{2}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
<b>Signe de <math>f'(x)</math></b>	-	0	+

$f'(x) \leq 0$  sur  $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$  donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$  sur  $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$  donc  $f$  est croissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
<b>Signe de <math>f'(x)</math></b>	-	0	+
$f(x)$		-6,25	

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6,25$  (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)

#### Exemple 2:

Soit  $g(x) = -x^2 + 5$

Alors  $g'(x) = -2x$

$g'(x) = 0$  pour  $-2x = 0$  soit  $x = 0$

$g'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty ; 0]$  donc  $g$  est croissante sur cet intervalle

$g'(x) \leq 0$  sur  $[0 ; +\infty[$  donc  $g$  est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>Signe de <math>g'(x)</math></b>	+	0	-
$g(x)$		5	

$g(0) = 5$

**Exemple 3:**

Soit  $h(x) = -5x^2 + 3x - 6$

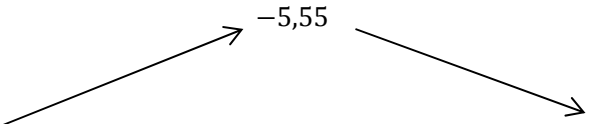
Alors  $h'(x) = -10x + 3$

$h'(x) = 0$  pour  $-10x + 3 = 0$  soit  $x = 0,3$

$h'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty ; 0,3 ]$  donc  $h$  est croissante sur cet intervalle

$h'(x) \leq 0$  sur  $[ 0,3 ; +\infty [$  donc  $h$  est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0,3$	$+\infty$
<b>Signe de <math>h'(x)</math></b>	+	0	-
$h(x)$			

$h(0,3) = -5,55$  (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)