Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

I) Fonction dérivée d'une fonction polynome de degré deux

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

La fonction dérivée de f , notée f', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{f'(x) = 2ax + b}$

Exemples :

Exemple 1:

Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 1}$

Exemple 2:

Soit $g(x) = -x^2 + 5$

Alors $\boldsymbol{g'(x) = -2x}$

Exemple 3:

Soit $h(x) = 5x^2 - 3x - 6$

$h'(x) = 2 \times 5x - 3$

Alors $\boldsymbol{h'(x) = 10x - 3}$

Exemple 4:

Soit $i(x) = -7x^2 + 4x - 1$

$i'(x) = -7 \times 2x + 4$

Alors $\boldsymbol{i'(x) = -14x + 4}$

II) Application à l'étude des variations d'une fonction

1) Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2:

- **Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors f est croissante sur cet intervalle.**
- **Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors f est décroissante sur cet intervalle.**

Exemples :

Exemple 1:

Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

Alors $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 1}$

$f'(x) = 0$ a pour solution $2x + 1 = 0$ soit $x = -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$		$-$	0	$+$	

$f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty$; $-\frac{1}{2}$] donc f est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$ sur [$-\frac{1}{2}$; $+\infty$ [donc f est croissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-6,25$	$\nearrow$	

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6,25$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)

Exemple 2:

Soit $g(x) = -x^2 + 5$

Alors $g'(x) = -2x$

$g'(x) = 0$ pour $-2x = 0$ soit $x = 0$

$g'(x) \geq 0$ sur$]-\infty$; 0] donc g est croissante sur cet intervalle

$g'(x) \leq 0$ sur [0 ; $+\infty$ [donc g est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(\boldsymbol{x})$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

$g(0) = 5$

Exemple 3:

Soit $h(x) = -5x^2 + 3x - 6$

Alors $\boldsymbol{h'(x) = -10x + 3}$

$h'(x) = 0$ pour $-10x + 3 = 0$ soit x = 0,3

$h'(x) \geq 0$ sur$]-\infty$; 0,3] donc h est croissante sur cet intervalle

$h'(x) \leq 0$ sur [0,3 ; $+\infty$ [donc h est décroissante sur cet intervalle

On obtient le tableau de variation suivant :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$0{,}3$		$+\infty$
Signe de $\boldsymbol{h'(x)}$		$+$	0	$-$	
$\boldsymbol{h(x)}$		↗	$-5{,}55$	↘	

$h(0{,}3) = -5{,}55$ (Résultat que nous pouvons obtenir à partir de la calculatrice)