# Fonction polynôme de degré trois.
# Fonction dérivée

## I) Définition

**On appelle fonction polynôme de degré 3, toute fonction polynôme de la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a$, $b$ , $c$ et $d$ sont des réels avec $a \neq 0$**

**Exemples :**

$f(x) = x^3$ $g(x) = -2x^3 + 3$ $h(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

$i(x) = 7x^3 + \frac{5}{x} - 2x + 3$ n'est pas une fonction polynôme.

## II) Fonction dérivée d'une fonction polynome de degré trois

**Soit $f$ une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ :**

**$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a$, $b$ , $c$ et $d$ sont des réels avec $a \neq 0$**

**La fonction dérivée de $f$ , notée $f'$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

**$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$**

**Exemples :**

**Exemple 1:**

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

$f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 9x + 12$

Alors $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

**Exemple 2:**

Soit $g(x) = -x^3 + 3x + 2$

Alors $g'(x) = -3x^2 + 3$

**Exemple 3:**

Soit $h(x) = x^3 - 1$

Alors $h'(x) = 3x^2$

**Exemple 4:**

Soit $i(x) = x^3 + x - 3$

$i'(x) = 3x^2 + 1$

## III) Application à l'étude des variations d'une fonction

### 1) Théorème

**Soit $f$ une fonction polynôme de degré 3:**

**• Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ d'un intervalle I, alors $f$ est croissante sur cet intervalle.**

**• Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x$ d'un intervalle I, alors $f$ est décroissante sur cet intervalle.**

### 2) Exemples d'étude de fonction polynôme de degré 3

**Exemple 1:**

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

Alors $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Etudions le signe de $f'(x)$ :

$6x^2 - 18x + 12 = 0$

$\Delta = 18^2 - 4 \times 6 \times 12 = 36$

$f'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \frac{18+\sqrt{36}}{12}$ et $x_2 = \frac{18-\sqrt{36}}{12}$

$x_1 = \frac{18+6}{12} = 2$ et $x_2 = \frac{18-6}{12} = 1$

$f'(x) = 0$ **a pour solution 1 et 2**

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $f'(x)$** | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| **Variation de $f$** | | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | 2 | $\nearrow$ | |

$f(1) = 2 - 9 + 12 - 2 = 3$ et $f(2) = 2 \times 8 - 9 \times 4 + 12 \times 2 - 2 = 2$


**Exemple 2:**

Soit $g(x) = -x^3 + 3x + 2$

Alors $g'(x) = -3x^2 + 3$

Etudions le signe de $g'(x)$ :

$-3x^2 + 3 = 0$

$\Delta = 36$

$g'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \frac{\sqrt{36}}{-6}$ et $x_2 = \frac{-\sqrt{36}}{-6}$

$x_1 = \frac{6}{-6}$ = -1 et $x_2 = \frac{-6}{-6}$ = 1

$g'(x) = 0$ **a pour solutions -1 et 1**

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $g'(x)$** | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| **Variation de $g$** | $\searrow$ | | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | |

$g(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $g(1) = -1 + 3 + 2 = 4$


**Exemple 3:**

Soit $h(x) = x^3 - 1$

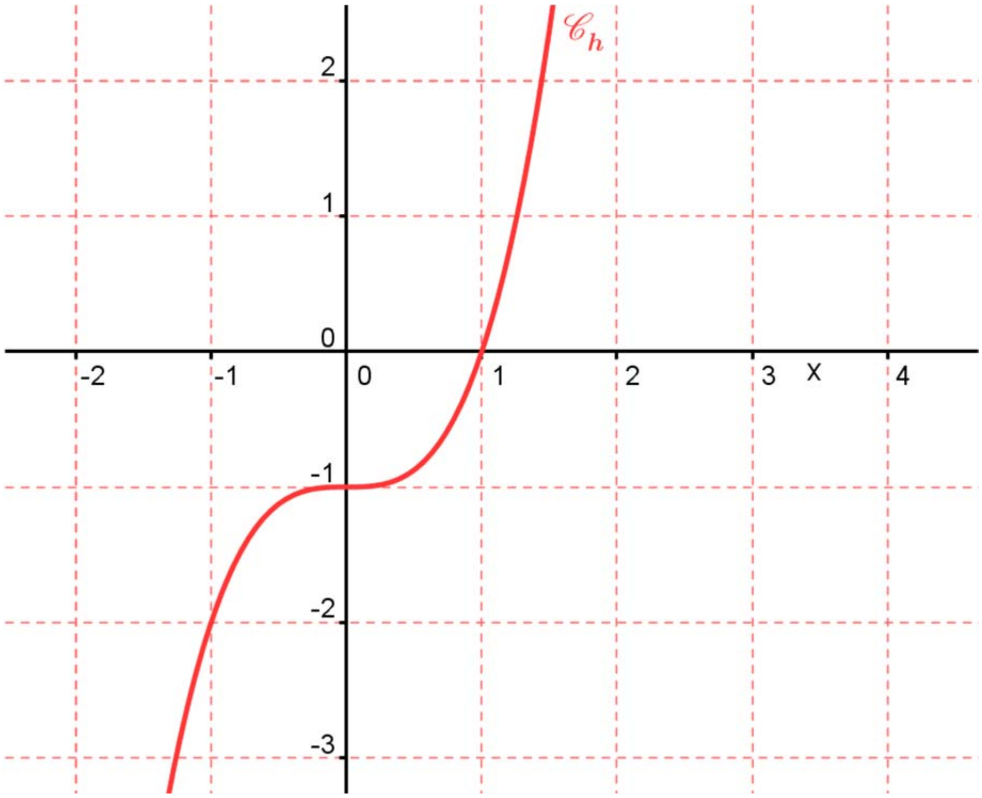
Alors $h'(x) = 3x^2$

$h'(x) = 0$ **pour $x = 0$ et $h(x) \geq 0$**

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de $h'(x)$** | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| **Variation de $h$** | | $\nearrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

$h(0) = -1$




**Exemple 4:**

Soit $i(x) = x^3 + x - 3$

Alors $i'(x) = 3x^2 + 1$

**$i'(x) > 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.**

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| **Signe de $i'(x)$** | $+$ |
| **Variation de $i$** | |