

Suites arithmétiques et géométriques

I) Suites arithmétiques

1) Définition :

Soit n_0 un nombre un entier naturel

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite. On dit qu'elle est arithmétique si, partant du
TERME INITIAL u_p , pour passer d'un terme au suivant, on
AJOUTE toujours le même nombre appelé RAISON

Exemple : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

- Le budget total pour un mois d'abonnement est : $40 + 30 = 70$
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €
- Le budget total pour deux mois d'abonnement est : $70 + 30 = 100$
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €
- Le budget total pour trois mois d'abonnement est : $100 + 30 = 130$
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite ... On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant.

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement : $u_1 = 70$

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement : $u_2 = u_1 + 30 = 70 + 30 = 100$

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement : $u_3 = u_2 + 30 = 100 + 30 = 130$

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement : $u_n = u_{n-1} + 30$

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30)

2) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n \geq p}$ est une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ et $n \geq p$, un entier naturel.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur appelée raison :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Cas particulier où le 1^{er} rang est 0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarques.

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite arithmétique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0 , il faut effectuer 28 additions du nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe**.

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n , vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Voir les démonstrations après les exemples :

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = u_n + 3 \text{ et } u_0 = 1$$

- 1) Justifier que cette suite est arithmétique
- 2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}
- 3) Calculer u_n en fonction de n
- 4) A partir de quel rang la suite u est-elle supérieure ou égale à 100 ?

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$	$u_1 = 4$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$	$u_2 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$	$u_3 = 10$

On applique la 2^{ème} formule :

$u_{23} = u_0 + 23 \times 3$	
$u_{23} = 1 + 23 \times 3 = 70$	$u_{23} = 70$

3) $u_n = u_0 + n \times 3$	$u_n = 1 + 3n$
-----------------------------	----------------

4) $u_n \geq 100$ en utilisant la question précédente on obtient $1 + 3n \geq 100$

$3n \geq 99$ d'où $n \geq 33$. A partir du terme d'indice 33, u_n est supérieure ou égale à 100

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = u_n - 2 \text{ et } u_1 = 5$$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2$. La suite est donc arithmétique de raison -2 et de premier terme 5 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois -2).

$$\begin{array}{ll} 2) u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3 & u_2 = 3 \\ u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1 & u_3 = 1 \\ u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1 & u_4 = -1 \end{array}$$

On applique la deuxième formule :

$$u_{30} = u_1 + (30 - 1) \times (-2) \quad \begin{array}{l} \text{le premier terme de la suite est } u_1 \text{ au lieu de } u_0 \\ \text{La suite a donc un terme de moins donc} \\ \text{la formule est } u_n = u_1 + (n - 1)r \end{array}$$

$$u_{30} = 5 + 29 \times (-2) = -53 \quad u_{30} = -53$$

$$3) u_n = u_1 + (n - 1) \times (-2)$$

$$u_n = 5 + (n - 1) \times (-2) \quad u_n = 7 - 2n$$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_5 = 12$. Déterminer la raison et le premier terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite arithmétique de raison r . Pour tous entiers p et n ($n \geq p$):

$$u_n = u_p + (n - p) r$$

$$u_5 = u_3 + (5 - 3) r$$

$$12 = 4 + 2r \text{ donc } r = 4.$$

Son premier terme est u_0 : $u_3 = u_0 + 3 \times 4$ on obtient : $12 = u_0 + 12$ donc $u_0 = 0$

La suite arithmétique u a pour raison 4 et a pour 1^{er} terme $u_0 = 0$

Exemple 4 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 8$

Montrer que u est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme u_0

Réponse :

$$\text{Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, u_{n+1} = 3(n+1) + 8 = 3n + 3 + 8 = 3n + 11$$

$$\text{Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3n + 11 - 3n - 8 = 3$$

La suite est donc arithmétique de raison 3. $u_0 = 3 \times 0 + 8 = 8$.
Son premier terme est $u_0 = 8$

3) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite arithmétique de raison r

- **Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.**
- **Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.**

Exemples :

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = u_n + 3 \text{ et } u_0 = 1$$

Réponse :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + 3$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = 3$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = u_n - 2 \text{ et } u_1 = 5$$

Réponse :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n - 2$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = -2$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante

4) Somme des entiers de 1 à n

a) Propriété :

Pour tout entier naturel non nul:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette formule a été proposée par Gauss à l'âge de 11 ans !

Exemple : Calculer $S = 1 + 2 + 3 \dots + 10$

$$S = 1 + 2 + 3 \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

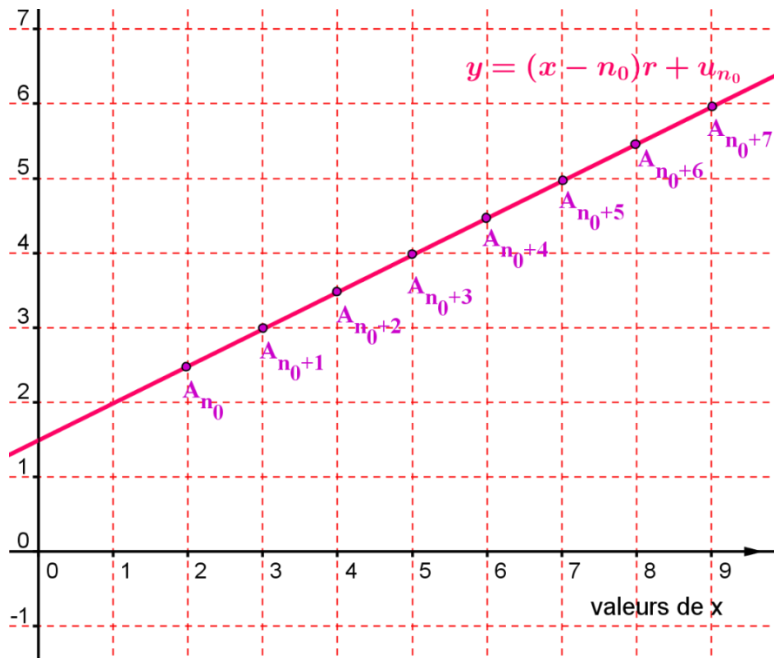
$$S = 55$$

5) Graphique.

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de **points alignés**, et cela la caractérise.

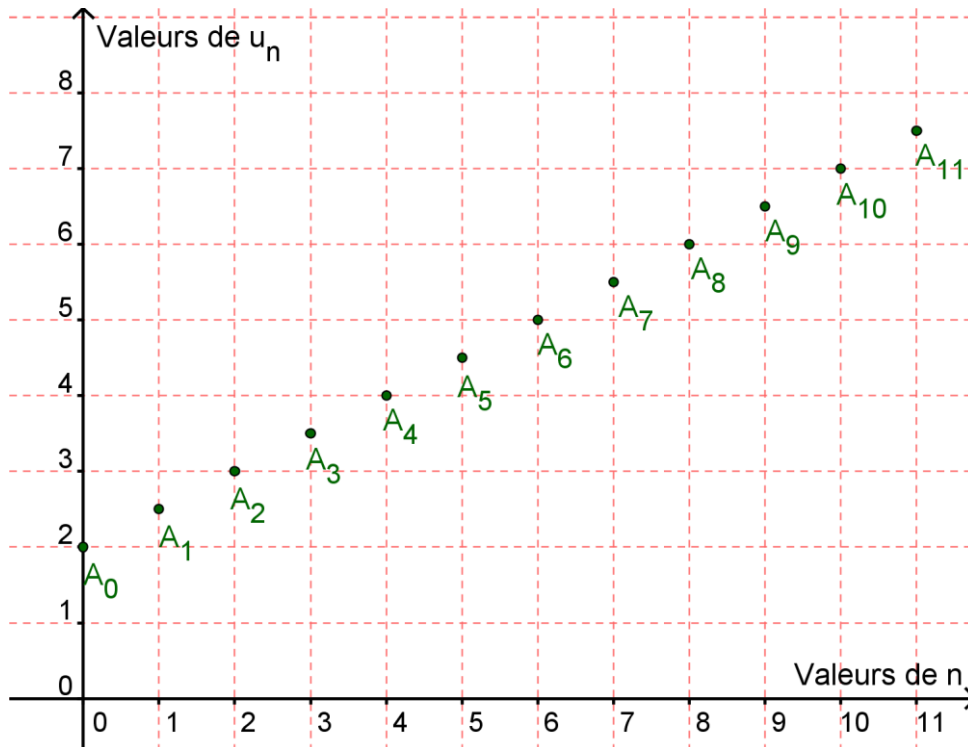
Si les points de la représentation graphique d'une suite sont alignés, alors c'est une suite arithmétique.

De plus, le **coefficient directeur** de la droite sur laquelle les points sont alignés est la **raison** de la suite arithmétique.



Exemples :

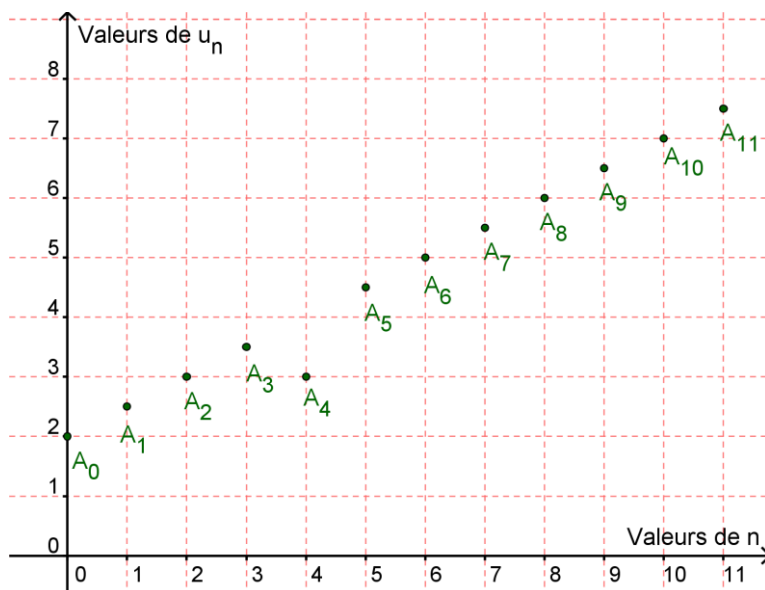
Exemple 1 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui peut être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n + 1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut 0,5.

On peut traduire cela par la formule $u_{n+1} - u_n = 0,5$. La suite peut donc être arithmétique de raison 0,5.

Exemple 2 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui ne peut pas être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n + 1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut 0,5, sauf dans deux cas : pour $n = 3$ et $n = 4$.

On a donc $u_{n+1} - u_n = 0,5$ pour $n \neq 3$ et $n \neq 4$, et $u_4 - u_3 = -0,5$ et $u_5 - u_4 = 1,5$.

Ces valeurs n'étant pas les mêmes, on peut affirmer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Attention ! Sur ces graphiques, relier les points isolés n'a pas de sens !

II) Suites géométriques.

1) Définition

Soit n_0 est un nombre entier naturel.

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du
TERME INITIAL u_p , pour passer d'un terme au suivant, on
MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON

Exemple : Une voiture, achetée neuve qui coûtait 20 000 € en 2008, perd chaque année 20% de sa valeur.

- Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :

$$20\,000 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20\,000 \times \mathbf{0,8} = 16\,000. \text{ En 2009 la voiture coûtera } 16\,000 \text{ €.}$$

- Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

$$16\,000 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 16\,000 \times \mathbf{0,8} = 12\,800. \text{ En 2010 la voiture coûtait } 12\,800 \text{ €.}$$

- Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

$$12\,800 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 12\,800 \times \mathbf{0,8} = 10\,240. \text{ En 2011 la voiture coûtait } 10\,240 \text{ €.}$$

Et ainsi de suite ... on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. $u_0 = 20\,000$

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire $u_1 = u_0 \times \mathbf{0,8} = 16\,000$

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire $u_2 = u_1 \times \mathbf{0,8} = 12\,800$

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{0,8}$

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre (dans notre cas 0,8)

2) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q

Soit $(u_n)_{n \geq p}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à p ,

on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q appelée raison:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_p en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Remarques :

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite géométrique.

En revanche, elle est inconcommodité dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0 , il faut effectuer 28 multiplications par le nombre q .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe**.

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n , vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3, la suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme 2.

$$\begin{array}{ll}
 2) \ u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6 & u_1 = 6 \\
 \quad u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18 & u_2 = 18 \\
 \quad u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54 & u_3 = 54
 \end{array}$$

On applique la 2^{ème} formule :

$$\begin{array}{ll}
 u_{15} = u_0 \times 3^{15} & \\
 u_{15} = 2 \times 3^{15} & u_{15} = 28\,697\,814
 \end{array}$$

$$3) \ u_n = u_0 \times 3^n \qquad u_n = 2 \times 3^n$$

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ et } u_1 = 3$$

- 1) Justifier que cette suite est géométrique
- 2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}
- 3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$. La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

$$\begin{array}{ll}
 2) \ u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 & u_2 = 1,5 \\
 \quad u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 & u_3 = 0,75 \\
 \quad u_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375 & u_4 = 0,375
 \end{array}$$

On applique la 2^{ème} formule :

$$\begin{array}{ll}
 u_{30} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{30-1} & \text{le 1^{er} terme de la suite est } u_1 \text{ au lieu de } u_0 \\
 & \text{La suite a donc un terme de moins donc} \\
 & \text{la formule est } u_n = u_1 \times q^{(n-1)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 u_{30} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{29} & u_{30} = \frac{3}{2^{29}}
 \end{array}$$

$$3) \ u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$$

$$\begin{array}{ll}
 u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} & u_n = \frac{3}{2^{n-1}}
 \end{array}$$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_6 = 32$. Déterminer la raison et le premier terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite géométrique de raison q . Pour tous entiers m et n :

$$u_n = u_m \times q^{(n-m)}$$

$$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$$

$$32 = 4 \times q^3 \text{ donc } q^3 = 8. \text{ Donc } q = 2$$

$$\text{Son premier terme est } u_0 : u_3 = u_0 \times q^3$$

$$\text{on obtient : } 4 = u_0 \times 2^3 \text{ Donc } u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}.$$

La suite géométrique u a pour raison 2 et a pour premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$

2. Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0

Réponse :

$$1. \text{ Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$2. \text{ Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$$

$$\text{La suite est donc géométrique de raison } \frac{5}{4}. \quad u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$$

$$\text{Son premier terme est } u_0 = 5$$

Démonstration de l'équivalence des deux formules:

• **Cas particulier où le premier rang est 0 :**

- **Tout d'abord montrons que si** $u_n = u_0 \times q^n$ **alors** $u_{n+1} = u_n \times q$

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Alors, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q = q \times u_n$, donc $u_{n+1} = u_n \times q$.

- **Montrons maintenant la réciproque qui est :**

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times q$ alors $u_n = u_0 \times q^n$

$(u_0 \neq 0)$ et $(q \neq 0)$ ainsi aucun u_n n'est nul.

$$\begin{array}{l}
 u_1 = u_0 \times q \\
 u_2 = u_1 \times q \\
 u_3 = u_2 \times q \\
 \vdots \\
 u_{n-1} = u_{n-2} \times q \\
 u_n = u_{n-1} \times q
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_1 = u_0 \times q \\ u_2 = u_1 \times q \\ u_3 = u_2 \times q \\ \vdots \\ u_{n-1} = u_{n-2} \times q \\ u_n = u_{n-1} \times q \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{n lignes} \end{array}$$

en multipliant membre à membre ces n égalités ci-contre on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \times \dots \times u_{n-1} \times q$$

On constate que les termes se simplifient deux à deux sauf deux (u_0 et u_n) et on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

• **Cas général où le premier rang est n_0 :**

Si la suite (u_n) est définie à partir du rang p , alors on étudie la suite (v_n) définie par :
 $v_n = u_{n+p}$ dans ce cas $v_0 = u_p$ ainsi on se ramène au cas précédent.

3) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite géométrique de raison q ($q > 0$) et de 1^{er} terme u_p :			
	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$
$u_p > 0$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est constante.
$u_p < 0$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est constante.
$u_p = 0$	(u_n) est une suite nulle		

Exemples :

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times 3 \text{ et } u_0 = 2$$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$

La suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times 3 \text{ et } u_0 = -2$$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$ mais $u_0 = -2 < 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Exemple 3 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2} \text{ et } u_0 = 2$$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $u_0 > 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4) Somme des puissances successives d'un nombre réel**a) Propriété :**

Pour tout entier naturel non nul et $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple : Calculer $S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^5$

$$S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^5 = \frac{1 - 10^{5+1}}{1 - 10} = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{1 - 1\,000\,000}{1 - 10} = \frac{-999\,999}{-9} = 111\,111$$

$$S = 111\,111$$

4) Exemple de graphique

Exemples :

Si $r = 1$ ou si $u_0 = 0$, alors les points du graphique sont alignés, sur la droite d'équation $y = u_0$ (**voir points rouges** ci-dessous pour $u_0 = 0$ et **les points bleus** pour $r = 1$ et $u_0 = 3$).

Les points verts ci-dessous sont les premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique de raison 1,2 et de terme initial $u_0 = 0,5$.

