

Polynome du second degré.

I) Fonction polynôme du second degré

1) Définition

On appelle fonction **polynôme de degré 2** ou **fonction trinôme** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ réels et } a \neq 0.$$

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée de f .

Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction f .

Exemples :

- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$; $b = -5$ et $c = 2$

- Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$

- Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 4x$

h n'est pas une fonction polynôme du second degré car $a = 0$, h est une fonction affine.

2) Racines d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme du second degré. Les racines du polynôme si elles existent sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Exemples :

Exemple 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 9$; $b = 3$ et $c = 0$

$$f(x) = 0 \text{ si et seulement si } 9x^2 + 3x = 0$$

$$\text{si et seulement si } 3x(3x + 1) = 0$$

$$\text{si et seulement si } x = 0 \text{ ou } 3x + 1 = 0$$

$$\text{si et seulement si } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

$S = \left\{0; -\frac{1}{3}\right\}$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 0 et $-\frac{1}{3}$, ce qui veut dire que

0 et $-\frac{1}{3}$ sont les racines de $9x^2 + 3x$

Exemple 2 : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x + 1$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = -2$ et $c = 1$

$g(x) = 0$ si et seulement si $x^2 - 2x + 1 = 0$ nous reconnaissons une identité remarquable à factoriser :

$x^2 - 2x + 1 = 0$ si et seulement si $(x - 1)^2 = 0$ si et seulement si $x - 1 = 0$

si et seulement si $x = 1$

$S = \{1\}$, ce qui veut dire que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$, on dit que **1 est la racine double de $x^2 - 2x + 1$.**

Exemple 3 : h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 3$

h est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = 0$ et $c = 3$

$h(x) = 0$ si et seulement si $x^2 + 3 = 0$

si et seulement si $x^2 + 3 = 0$

si et seulement si $x^2 = -3$

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
ce qui veut dire que $x^2 + 3$ **n'a pas de racine**.

3) Factorisation d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors f peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemples :

Exemple 1 : Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 tel que $f(0) = 20$. Déterminez l'expression factorisée de f

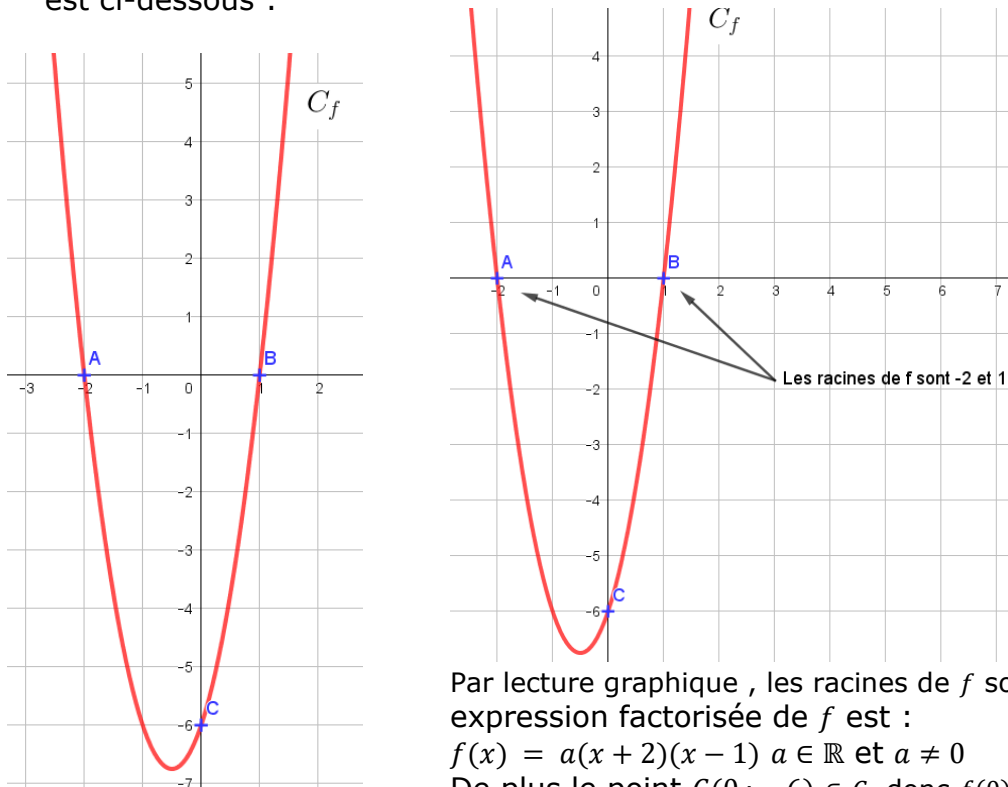
f une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 alors une expression factorisée de f est : $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$ $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Si de plus nous voulons que $f(0) = 20$ alors il suffit de remplacer x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$, $f(0) = a(0 - 2)(0 - 5) = 10a$

$$10a = 20 \text{ donc } a = \frac{20}{10} = 2$$

L'expression factorisée de f est : $f(x) = 2(x - 2)(x - 5)$

Exemple 2 : Déterminez l'expression factorisée de f dont la représentation graphique est ci-dessous :



Par lecture graphique, les racines de f sont -2 et 1 alors une expression factorisée de f est :

$$f(x) = a(x + 2)(x - 1) \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

De plus le point $C(0; -6) \in C_f$ donc $f(0) = -6$

On remplace x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x + 2)(x - 1)$

$$f(0) = -2a = -6$$

Donc $a = 3$ et la forme factorisée de f est :

$$f(x) = 3(x + 2)(x - 1)$$

4) Propriétés de la somme et du produit des racines d'un polynôme du second degré:

Si le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues, alors :

leur somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

leur produit $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

La fonction peut s'écrire sous la forme : $f(x) = a(x^2 - Sx + P)$

Exemples :

Exemple 1 : Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

a. Trouver une racine évidente de f

b. Déterminer l'autre racine en appliquant les propriétés de la somme et du produit des racines puis factoriser $f(x)$.

a. $f(1) = 3 \times (1)^2 - 5 \times (1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$ donc 1 est une racine évidente de f

b. $x_1 = 1$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ donc $1 + x_2 = -\frac{-5}{3}$ $1 + x_2 = \frac{5}{3}$ $x_2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ L'autre racine est $\frac{2}{3}$

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $f(x) = 3(x - 1)(x - \frac{2}{3})$

Exemple 2 : f est une fonction polynôme du second degré admettant -1 pour racine et dont le produit des racines est 10 :

1. Déterminez sous forme factorisée **une** expression de $f(x)$
2. Déterminez **la** forme développée de $f(x)$ sachant que $f(1) = 44$

1. On sait que $x_1 = -1$ et $x_1 \times x_2 = 10$ donc $x_2 = -10$ donc $f(x) = a(x+1)(x+10)$ avec $a \neq 0$

2. $f(x) = a(x^2 - Sx + P)$ avec $S = -1 + (-10) = -11$ et $P = 10$

Donc $f(x) = a(x^2 + 11x + 10)$ or, $f(1) = 44$ $f(1) = a(1 + 11 + 10) = 22a$ donc $22a = 44$ donc $a = 2$

Donc $f(x) = 2(x^2 + 11x + 10) = 2x^2 + 22x + 20$ La forme développée est $f(x) = 2x^2 + 22x + 20$

II) Résolution d'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

1) Forme canonique

Soit f une fonction polynôme de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Il existe deux réels α et β tel que : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Cette expression est appelé forme canonique de $f(x)$

Exemple : Déterminer la forme canonique de la fonction $f(x) = 2x^2 + 16x + 2$

Méthode 1 : On applique la formule directement :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$ $b = 16$ et $c = 2$, pour trouver sa forme canonique :

$$\alpha = -\frac{16}{2 \times 2} = -4 \quad \text{et} \quad \beta = f(-4) = 2 \times (-4)^2 + 16 \times (-4) + 2 = 32 - 64 + 2 = -30$$

Donc $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x + 4)^2 - 30$

$f(x) = 2(x + 4)^2 - 30$ est la forme canonique de f

Méthode 2 : On retrouve la forme canonique à partir des identités remarquables :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$, pour trouver sa forme canonique,

• Tout d'abord on factorise par a c'est-à-dire 2 dans cet exemple.

$f(x) = 2(x^2 + 8x + 1)$, ensuite nous allons maintenant considérer $x^2 + 8x$ comme étant le début de l'une des identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2$$

On rajoute 4^2
pour compléter
l'identité
remarquable

On enlève 4^2
afin de ne pas
modifier l'égalité

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 16$$

• On remplace dans l'expression de la fonction f , $x^2 + 8x$ par $(x + 4)^2 - 16$ et on obtient :
 $f(x) = 2(x^2 + 8x) + 2 = 2[(x + 4)^2 - 4^2] + 2 = 2(x + 4)^2 - 2 \times 16 + 2 = 2(x + 4)^2 - 30$

Cette écriture est la forme canonique avec $\alpha = -4$ et $\beta = -30$

Remarque : on a bien : $f(-4) = 2(4^2 - 32 + 1) = -30 = \beta$

Exemple 2: Soit $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$. Ecrire le trinôme $f(x)$ sous forme canonique.

On applique la formule :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2} \quad a = 1; b = -3 \text{ et } c = \frac{3}{2}$$

$$\text{On calcule : } -\frac{b}{2a} : -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} ; \text{ donc } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{On calcule } f(\alpha) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{donc } \beta = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Donc : } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \text{ est la forme canonique de } f$$

Sans appliquer la formule :

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2} = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{6}{4} = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \text{ On retrouve le résultat.}$$

2) Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ ou du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Exemples :

• Calculer le discriminant du trinôme $3x^2 - 5x + 1$ on a : $a = 3$; $b = -5$ et $c = 1$

$$\text{Réponse : } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13$$

$$\Delta = 13$$

• Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$: on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$ et $c = 5$

$$\text{Réponse : } \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 5 = 1 - 10 = -9$$

$$\Delta = -9$$

3) Résolution des équations du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Le trinôme se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ Le trinôme se factorise de la façon suivante : $f(x) = a(x - x_0)^2$	l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ f n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.

Remarque : Lorsque l'équation admet une solution unique x_0 , c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$, on dit que x_0 est une solution double, car elle a deux fois la même solution et $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Exemples : Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines en utilisant le discriminant. si oui en donner une factorisation.

1) $f(x) = x^2 - x - 6$;

2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$;

3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$;

4) $j(x) = x^2 - x + 1$;

Réponses :

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $a = 1$ $b = -1$ et $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$\Delta = 25 > 0$ Le polynôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

-2 et 3 sont les deux racines.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de la fonction f : $f(x) = (x + 2)(x - 3)$

2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$

Tout d'abord factorisons par 5 car 5 ; -40 et 35 sont des multiples de 5

$g(x) = 5(x^2 - 8x + 7)$; $a = 1$ $b = -8$ et $c = 7$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (7) = 64 - 28 = 36$$

$$\Delta = 36 > 0 \text{ le polynôme admet 2 racines : } x_1 = \frac{8 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{8 - 6}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{8 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{8 + 6}{2} = 7$$

1 et 7 sont les deux racines.

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de g : $g(x) = 5(x - 1)(x - 7)$

$$3) h(x) = 9x^2 - 6x + 1; \quad a = 9 \quad b = -6 \text{ et } c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

le polynôme admet une racine double $x_0 = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$$\text{on a donc : } h(x) = a(x - x_0)^2$$

$$h(x) = 9 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$4) j(x) = x^2 - x + 1 \quad a = 1 \quad b = -1 \text{ et } c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

$\Delta = -3 < 0$ le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et donc n'est pas factorisable.

III) Signe du trinôme. Inéquations

1) Signe du trinôme

Propriété :

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
On obtient le signe de $f(x)$ en fonction des signes de a et de Δ :

si $\Delta > 0$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ d'après les résultats concernant le signe d'un produit de fonctions affines : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$							
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a							
si $\Delta = 0$	$f(x) = a(x - x_0)^2$ alors : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table> Un carré étant toujours positif le signe dépend de celui de a.	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	signe de a	0	signe de a		
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$								
$f(x)$	signe de a	0	signe de a								
si $\Delta < 0$	$f(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ et $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ alors: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table> L'expression à l'intérieur des crochets est positif comme la somme de termes positifs.	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de a					
x	$-\infty$	$+\infty$									
$f(x)$	signe de a										

Exemples :

Etudier le signe des trinômes suivants :

$$f(x) = -x^2 + x + 2 ; \quad g(x) = 4x^2 + 4x + 1 ; \quad h(x) = -3x^2 + x - 35 .$$

Réponses :

Pour f : $a = -1$ $b = 1$ $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 \quad \Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 + 3}{-2} = -1$$

le polynôme admet 2 racines -1 et 2 et on a : $f(x) = -(x + 1)(x - 2)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x) = -x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Comme $a < 0$ donc on a $f(x) < 0$ sur $] -\infty ; -1 [\cup] 2 ; +\infty [$ et $f(x) > 0$ sur $] -1 ; 2 [$

Pour g : $\Delta = 0$

Le polynôme admet une racine $-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$	$+$	0	$+$

et on a $g(x) = 4(x + \frac{1}{2})^2$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

Pour h :

$\Delta = -419 < 0$ le polynôme n'a pas de racine.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x) = -3x^2 + x - 35$	$-$	$-$

le polynôme n'admet aucune racine et $a < 0$ donc $h(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

2) Inéquation du second degré**Définition**

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré.

On appelle inéquation du second degré à une inconnue toute inéquation de la forme :

$$P(x) > 0 ; P(x) < 0 ; P(x) \geq 0 \text{ ou } P(x) \leq 0$$

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation suivante :

$$4x^2 + 8x - 252 > 0$$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-252) = 4\,096$$

$$\Delta > 0 \quad 4x^2 + 8x - 252 \text{ admet deux racines : } x_1 = \frac{-8 + \sqrt{4096}}{2 \times 4} \text{ et } x_2 = \frac{-8 - \sqrt{4096}}{2 \times 4}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 64}{8} \text{ et } x_2 = \frac{-8 - 64}{8}$$

$$x_1 = \frac{56}{8} \text{ et } x_2 = \frac{-72}{8} \text{ donc } x_1 = 7 \text{ et } x_2 = -9$$

Les deux racines du polynôme sont -9 et 7 , le signe du a qui est 4 est positif, nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-9	7	$+\infty$
$4x^2 + 8x - 252$	$+$	0	$-$	$+$

Les solutions de l'inéquation $4x^2 + 8x - 252 > 0$ sont donc : $S =]-\infty; -9[\cup]7; +\infty[$

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation suivante :

$$-12x^2 + 36x - 27 > 0$$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$$\Delta = 36^2 - 4 \times (-27) \times (-12) = 0$$

$$\Delta = 0, \text{ donc } -12x^2 + 36x - 27 \text{ admet une seule racine } x_0 = \frac{-36}{2 \times (-12)} = \frac{-36}{-24} = 1,5$$

Le signe de a est négatif (-12), nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $-12x^2 + 36x - 27 < 0$ Les solutions de l'inéquation $-12x^2 + 36x - 27 > 0$ sont : $S = \{\emptyset\}$

Exemple 3 : Résoudre l'inéquation suivante : $7x^2 - 5x + 4 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 4 = -87 < 0$$

donc $7x^2 - 5x + 4$ n'admet aucune racine. Le signe de a (7) est positif on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $7x^2 - 5x + 4 > 0$ donc **Les solutions de l'inéquation $7x^2 - 5x + 4 > 0$ sont : $S = \mathbb{R}$**

IV) Représentation graphique d'un trinôme du second degré

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est appelé **parabole**.

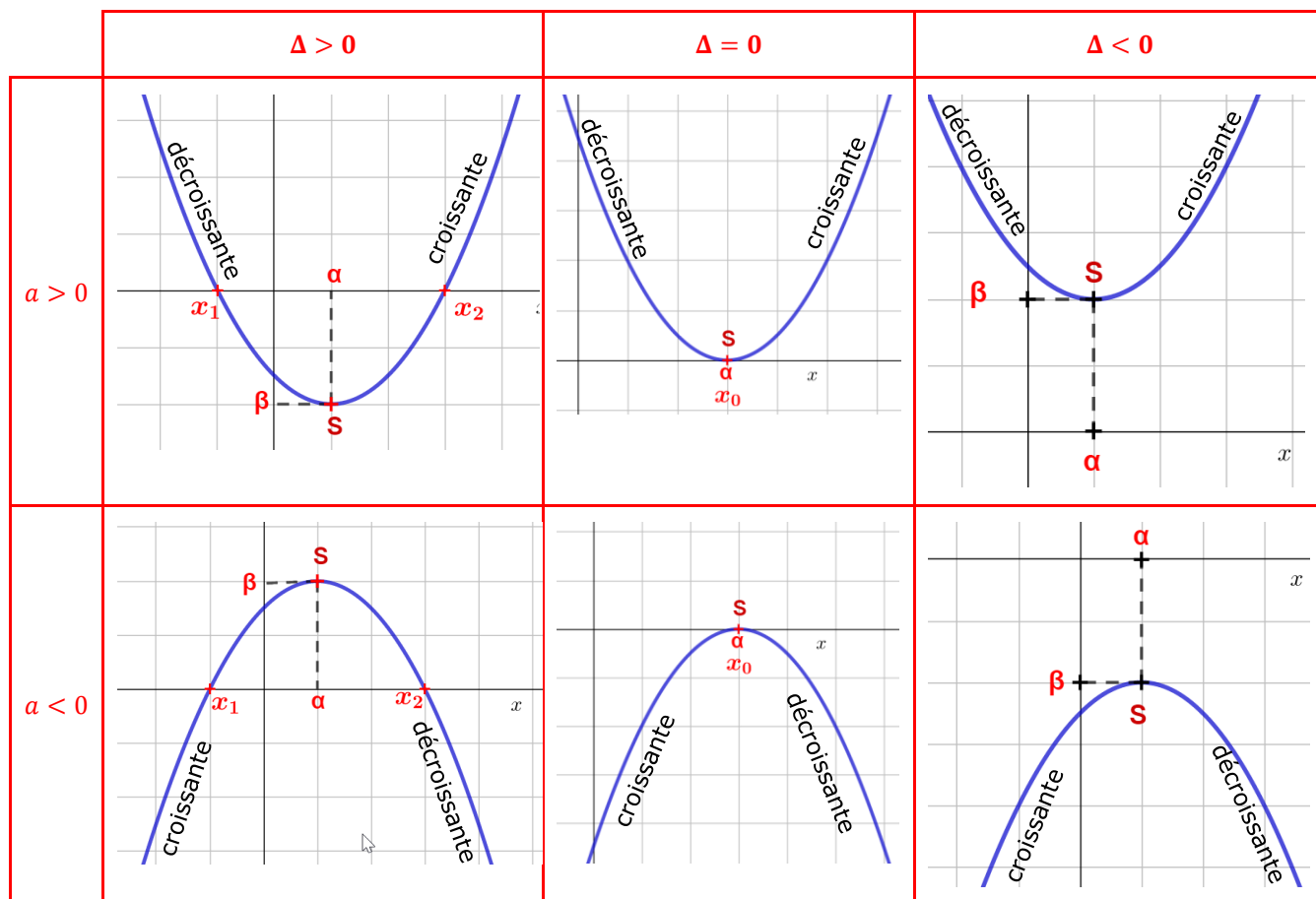
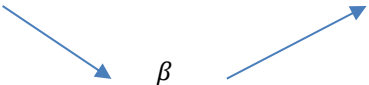
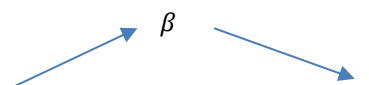


Tableau de variation d'un polynôme du second degré :

$a > 0$				$a < 0$			
x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$				f			

Démonstration :

Soit f un polynôme du second degré. On peut écrire f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } a \text{ non nul}$$

Supposons $a > 0$	
Soit c, d deux réels sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$ tel que : $c < d$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or $c - \alpha < 0$ et $d - \alpha < 0$ donc $(c - \alpha)^2 > (d - \alpha)^2$ Comme $a > 0$: $a(c - \alpha)^2 > a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta > a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $f(c) > f(d)$ f est donc une fonction décroissante sur $] -\infty; \alpha]$	Soit c, d deux réels sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ tel que : $c < d$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or, $c - \alpha > 0$ et $d - \alpha > 0$ donc $(c - \alpha)^2 < (d - \alpha)^2$ Comme $a > 0$: $a(c - \alpha)^2 < a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta < a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $f(c) < f(d)$ f est donc une fonction croissante sur $[\alpha; +\infty[$

Supposons $a < 0$	
Soit c, d deux réels sur l'intervalle $] -\infty; \alpha]$ tel que : $c < d$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or $c - \alpha < 0$ et $d - \alpha < 0$ donc $(c - \alpha)^2 > (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 < a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta < a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $f(c) < f(d)$ f est donc une fonction croissante sur $] -\infty; \alpha]$	Soit c, d deux réels sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ tel que : $c < d$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or, $c - \alpha > 0$ et $d - \alpha > 0$ donc $(c - \alpha)^2 < (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 > a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta > a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $f(c) > f(d)$ f est donc une fonction décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

De plus , en tenant compte du signe du discriminant :

$\Delta > 0$ la fonction ayant deux racines distincts la représentation graphique coupe l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, la fonction ayant une racine double, la représentation graphique coupe l'axe des abscisses, au point d'abscisse $x_0 = a = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, la fonction n'ayant pas de racine, la représentation graphique ne coupe jamais l'axe des abscisses.