

Etude de la fonction : $e^{u(x)}$

• Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

• Comme la fonction exponentielle est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction u'

• Comme la fonction exponentielle est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de f est le même que celui de u .

• Pour tout x de I $e^{u(x)} > u(x)$

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemples :

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $f(x) = e^{3x^2-5x+1}$

Soit u la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$$u'(x) = 6x - 5$$

$$u'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{5}{6} \quad u'(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad u'(x) \leq 0 \text{ pour } x \leq \frac{5}{6}$$

$$f'(x) = (6x - 5) e^{3x^2-5x+1}$$

Comme e^{3x^2-5x+1} est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

x	-5	$\frac{5}{6}$	5
$u'(x)$		-	+
$u(x)$	101	$-\frac{13}{12}$	51

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	-5	$\frac{5}{6}$	+5
$f(x)$	e^{101}	$e^{-\frac{13}{12}}$	e^{51}

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :



Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Soit u la fonction définie sur $[1; 7]$ par $u(x) = \frac{1}{x}$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$u'(x) < 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Comme $e^{\frac{1}{x}}$ est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

x	1	7
$u'(x)$	-	
$u(x)$	1	$\frac{1}{7}$

on obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	1	7
$f(x)$	e	$e^{\frac{1}{7}}$

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :

