Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$

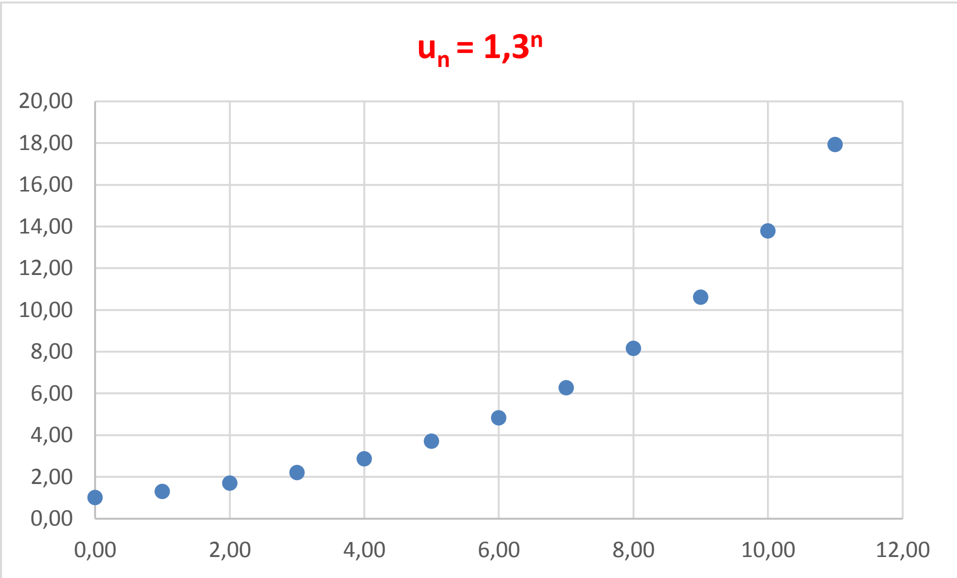
I) Fonction $f : x \mapsto q^x$ avec $q > 0$

1) Des suites géométriques aux fonctions exponentielles de base q

a) Exemple

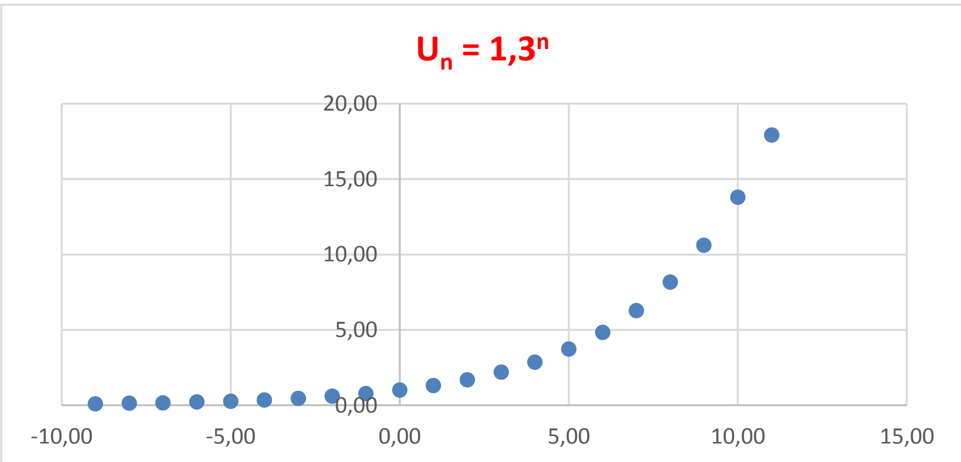
Soit (U_n) la suite géométrique $U_n = 1{,}3^n$ (voir chapitre précédent suite géométrique)
Nous avons représenté ci-dessous, à l'aide d'un tableur, le nuage de points de cette suite :

x	$1{,}3^x$
0	1
1	1,3
2	1,69
3	2,197
4	2,8561
5	3,71293
6	4,826809
7	6,2748517
8	8,15730721
9	10,6044994
10	13,7858492
11	17,9216039

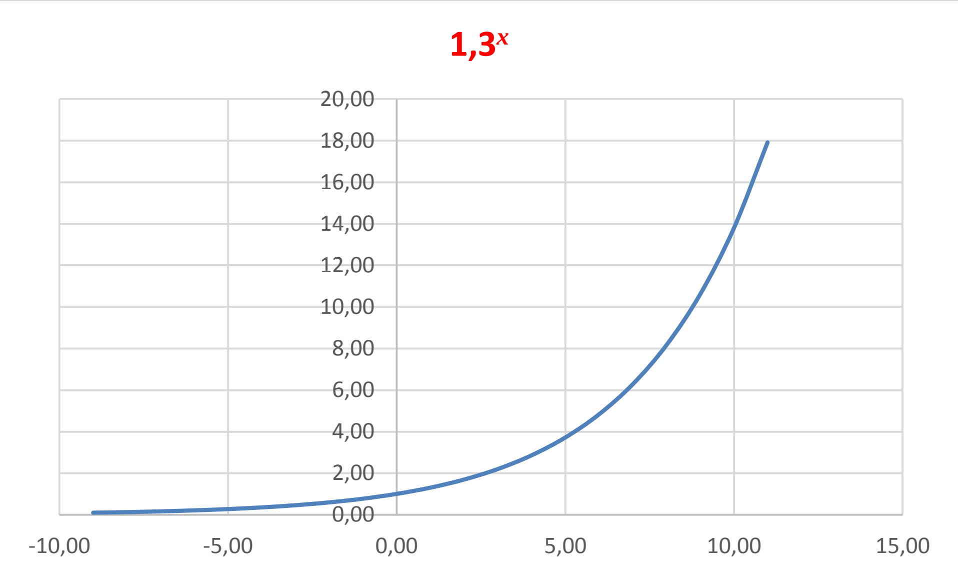


Par extension, sachant que $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$ (chapitre puissance 4°), on peut donc calculer les valeurs de $1{,}3^n$ pour des valeurs de n négatives ce qui donne :

x	$1{,}3^x$
-9,00	0,09
-8,00	0,12
-7,00	0,16
-6,00	0,21
-5,00	0,27
-4,00	0,35
-3,00	0,46
-2,00	0,59
-1,00	0,77
0,00	1,00
1,00	1,30
2,00	1,69
3,00	2,20
4,00	2,86
5,00	3,71
6,00	4,83
7,00	6,27
8,00	8,16
9,00	10,60
10,00	13,79
11,00	17,92



Si on relie tous ces points par une ligne continue, parfaitement lisse sans lever le crayon, on obtient la courbe d'une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$:



C'est ainsi que l'on définit une nouvelle fonction appelée fonction exponentielle de base $1{,}3$ qui est le prolongement de la suite géométrique (U_n) telle que $U_n = 1{,}3^n$. Dans notre cas on la notera : $f(x) = 1{,}3^x \quad x \in \mathbb{R}$

b) Définition

Soit q un nombre strictement positif donné.

La suite de terme général $u_n = q^n$, pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison q (voir le chapitre qui s'intitule suite géométrique).

La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$ avec $q > 0$

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $q^x > 0$

II) Propriétés

1) Rappel de 4° : propriétés sur les puissances

Pour tout nombre a entier relatif, m et n entiers relatifs :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

2) Relation fonctionnelle

Soit f une fonction exponentielle de base q >0

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$ **autrement dit pour tous réels x et y :** $q^{x+y} = q^x \times q^y$

Exemple :

$3^x \times 3^y = 3^{x+y}$

Conséquences : Les propriétés de 4° vues précédemment se généralisent aux fonctions exponentielles de base q pour m et n réels.

Pour tout nombre q réels strictement positif, x et y réels:

$q^x \times q^y = q^{x+y}$ $\quad \frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$ $\quad (q^x)^y = q^{x \times y}$ $\quad q^{-x} = \frac{1}{q^x}$

$q^0 = 1$ $\quad q^1 = q$ $\quad q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$

Exemples :

$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

$1{,}5^{x+1} = 1{,}5^x \times 1{,}5$

$3^{-x} = \frac{1}{3^x}$

$1{,}5^x \times 1{,}5^{-x} = 1$

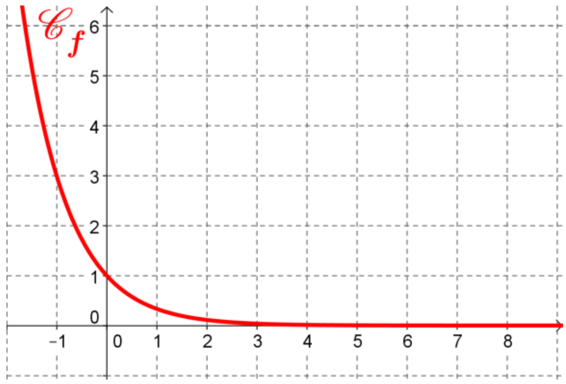
$1{,}6^{2x-1} = \frac{1{,}6^{2x}}{1{,}6} = \frac{(1{,}6^2)^x}{1{,}6} = \frac{1}{1{,}6} \times (1{,}6^2)^x = 0{,}625 \times 2{,}56^x$

III) Sens de variation

En continuité avec les suites numériques, on admet que, pour une fonction exponentielle de base q, avec $q > 0$:

- **Si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$;**
- **Si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$;**
- **Si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction : $x \mapsto 1$;**

Exemples:

<table>
<tr><td>$q = 2$</td><td>$q = \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exemple : On considère la fonction f définie sur [0 ; 20] par $f(x) = 700 \times 1{,}036^x$

Le nombre $f(x)$ représente la valeur acquise d'un capital de 700€ placé pendant une durée x, en année aux taux annuel de 3,6%

a) Calculer la valeur acquise par le Capital lorsqu'Alain atteindra sa majorité, soit dans 2ans et demi.

b) Justifier que la fonction f est croissante sur [0 ; 10]. Interpréter.

c) En utilisant un tableau dire au bout de combien d'années Alain devra-t-il patienter pour voir au moins doubler son capital initial ?

Réponse :

a) 2 ans et demi correspond à 2,5 ans

$f(2{,}5) = 700 \times 1{,}036^{2{,}5} = 764{,}7111606$

Dans deux ans et demi il aura environ 764,71 €

b) Comme 1,036 > 1 alors la fonction f est croissante sur [0 ; 10]
Ce qui veut dire que le capital augmente de 3,6 % tous les ans.

c) On cherche x tel que : $700 \times 1{,}036^x = 1400$ c'est-à-dire : $1{,}036^x = 2$
A l'aide d'un tableur on obtient :

	A	B
1	**x**	**f(x)**
2	1	1,036
3	2	1,073296
4	3	1,11193466
5	4	1,1519643
6	5	1,19343502
7	6	1,23639868
8	7	1,28090903
9	8	1,32702176
10	9	1,37479454
11	10	1,42428714
12	11	1,47556148
13	12	1,52868169
14	13	1,58371423
15	14	1,64072795
16	15	1,69979415
17	16	1,76098674
18	17	1,82438227
19	18	1,89006003
20	19	1,95810219
21	20	2,02859387
22		

Alain devra patienter 20 ans pour au moins doubler son capital.