Etude de limites de suites monotones

I) Définition

• On dit que la suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq$ M. On dit que M est un majorant de la suite (u_n).

• On dit que la suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.On dit que M est un minorant de la suite (u_n).

• On dit que la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1:

La suite (u_n) définie par $u_n = 5 - \sqrt{n}$

Pour tout entier naturel n : $5 - \sqrt{n} \leq 5$ donc

Pour tout entier naturel n :$u_n \leq 5$. (u_n) est donc majorée par 5.

Exemple 2:

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par $u_n = \frac{-3}{n} + 2$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\frac{1}{n} \leq 1$

On obtient donc : $\frac{-3}{n} \geq -3$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\frac{-3}{n} + 2 \geq -3 + 2$

Pour tout entier naturel n :$u_n \geq -1$ (u_n) est donc minorée par -1.

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par $u_n = \frac{1}{n}$

Pour tout $n \geq 1$: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$

La suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 0 elle est donc bornée.

II) Théorèmes

1) Théorème 1

• Toute suite croissante majorée est convergente.

• Toute suite décroissante minorée est convergente.

Ce théorème est admis.

Remarques :

• Ce théorème affirme la convergence mais il ne nous permet pas de connaitre précisément sa limite ℓ

• Pour une suite croissante, si M est un majorant de la suite (u_n), on peut seulement affirmer que $\ell \leq$ M.

• Pour une suite décroissante, si m est un minorant de la suite (u_n), on peut seulement affirmer que $\ell \geq m$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie dans $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$ et $u_0 = 2$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante

Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?

Réponse :

1) Pour $n \geq 0$, notons P_n la propriété : $2 \leq u_n \leq 3$

• **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ $u_0 = 2$, on a bien $2 \leq u_0 \leq 3$

• Supposons que pour **un entier n** quelconque **fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$2 \leq u_n \leq 3$ alors :

$\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ on obtient :

$\dfrac{3}{3} \leq \dfrac{3}{u_n} \leq \dfrac{3}{2}$ d'où:

$\dfrac{-3}{2} \leq \dfrac{-3}{u_n} \leq -1$ on obtient donc :

$4 - \dfrac{3}{2} \leq 4 - \dfrac{3}{u_n} \leq 4 - 1$ d'où :

$\dfrac{5}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ on a bien : $2 \leq 2{,}5 \leq u_{n+1} \leq 3$

ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n
Donc pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 3$

Montrons que la suite (u_n) est croissante :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{3}{u_n} - u_n = \dfrac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n - 3}{u_n}$

Etudions le signe de $-u_n^2 + 4u_n - 3$

Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

Ce polynôme a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{-2} = 3$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

$f(x) \geq 0$ sur [2 ; 3], Comme pour tout entier naturel n:

$2 \leq u_n \leq 3$ alors $-u_n{}^2 + 4u_n - 3 \geq 0$

Le dénominateur étant aussi positif $u_n \geq 2$

Donc pour tout entier naturel n: $\dfrac{-u_n{}^2 + 4u_n - 3}{u_n} \geq 0$

Donc pour tout entier naturel n: $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente.

Attention, nous ne connaissons pas cette limite, ce n'est pas parce qu'elle est majorée par 3 que sa limite est 3 !!

2) Théorème 2

- **Toute suite croissante non majorée a pour limite +∞.**
- **Toute suite décroissante non minorée a pour limite -∞.**

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Dire qu'une suite est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n $u_n \leq$ M

La suite (u_n) est non majorée, alors quel que soit le nombre réel A, il existe un indice N tel que $u_N >$ A

La suite (u_n) est croissante, il en résulte que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n \geq u_N >$ A

Ce qui signifie : quel que soit le nombre réel A, l'intervalle] A ; $+\infty$ [contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. La suite (u_n) a donc pour limite $+\infty$

De façon analogue on démontre la deuxième partie de ce théorème.

Remarque :
Une suite non majorée ne tend nécessairement vers **+∞.** Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang comme par exemple : Soit (u_n) la suite définie dans $\mathbb{N}$ par $u_n = ((-1)^n + 1)n$

$u_0 = ((-1)^0 + 1) \times 0 = 0$

$u_1 = ((-1)^1 + 1) \times 1 = 0$

$u_2 = ((-1)^2 + 1) \times 2 = 4$

$u_3 = ((-1)^3 + 1) \times 3 = 0$

$u_4 = ((-1)^4 + 1) \times 4 = 8$

Plus généralement pour tout entier naturel n, $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$

Cette suite ne peut donc pas avoir pour limite $+\infty$ même si elle n'est pas majorée.

Exemples :

• Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n - 4$

Cette suite est décroissante et non minorée elle a donc pour limite $-\infty$

• Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{5n} + 4$

Cette suite est croissante et non majorée elle a donc pour limite $+\infty$

3) Théorème 3

• Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

• Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geq \ell$.

Exemple 1 :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = 4 - \frac{3}{n}$

$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{n+1}$

pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{n+1} - (4 - \frac{3}{n})$

Donc pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = \frac{3n+3-3n}{n(n+1)} = \frac{3}{n(n+1)} > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} 4 - \frac{3}{n} = 4$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$

Comme (u_n) est une suite croissante et admet 4 pour limite alors :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $u_n \leq 4$

Exemple 2 :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = 7 + \frac{5}{n^2}$

$u_{n+1} = 7 + \frac{5}{(n+1)^2}$

pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = 7 + \frac{5}{(n+1)^2} - (7 + \frac{5}{n^2})$

Donc pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)^2} - \frac{5}{n^2}$

Or, pour tout $n \geq 1$:

$n + 1 > n > 1$ donc

$(n+1)^2 > n^2$

on obtient alors pour tout $n \geq 1$: :

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

$\frac{5}{(n+1)^2} < \frac{5}{n^2}$ et donc :

$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)^2} - \frac{5}{n^2} < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 7 + \frac{5}{n^2} = 7$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$

Comme (u_n) est une suite décroissante et admet 7 pour limite alors :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boldsymbol{u_n \geq 7}$