# Fonction logarithme népérien

## I) La fonction logarithme népérien : Définition

### 1) Définition de la fonction logarithme népérien

**Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de $a$, noté $ln(a)$ ou $ln\, a$ l'unique nombre solution de l'équation : $exp(x) = a$**

La fonction exponentielle (étudiée dans le chapitre précédent), est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il en résulte que :

- L'image par la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ est $]0 ; +\infty[$
- Pour tout $x > 0$ il existe un unique nombre $y$ et un seul tel que: $e^y = x$
- On définit ainsi une fonction de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ appelé fonction logarithme népérien.

### 2) Conséquences

- **La fonction $ln$ est définie sur $]0 ; +\infty[$**
- **Pour tout nombre $> 0$ , par définition on a : $e^{ln(x)} = x$**
- **$ln(e) = 1$**
- **$ln(1) = 0$**

### 3) Théorème:

**Pour tout nombre réel $a$ strictement positif et pour tout nombre $b$ :**
**$ln(a) = b$ équivaut à $a = e^b$**

#### a) Démonstration :

Si $ln(a) = b$ alors $e^{ln(a)} = e^b$ c'et a dire $a = e^b$

Réciproquement si $a = e^b$ alors $ln(a) = ln(e^b)$ c'est-à-dire $ln(a) = b$

#### b) Exemples d'application :

Résoudre les équations suivantes :

a) $ln(x) = 5$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$ on a donc $= e^5$ . **La solution est: S = $\{e^5\}$**

b) $ln(x) = -3$

Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

on a donc $= e^{-3}$ . **La solution est: S = $\{e^{-3}\}$**

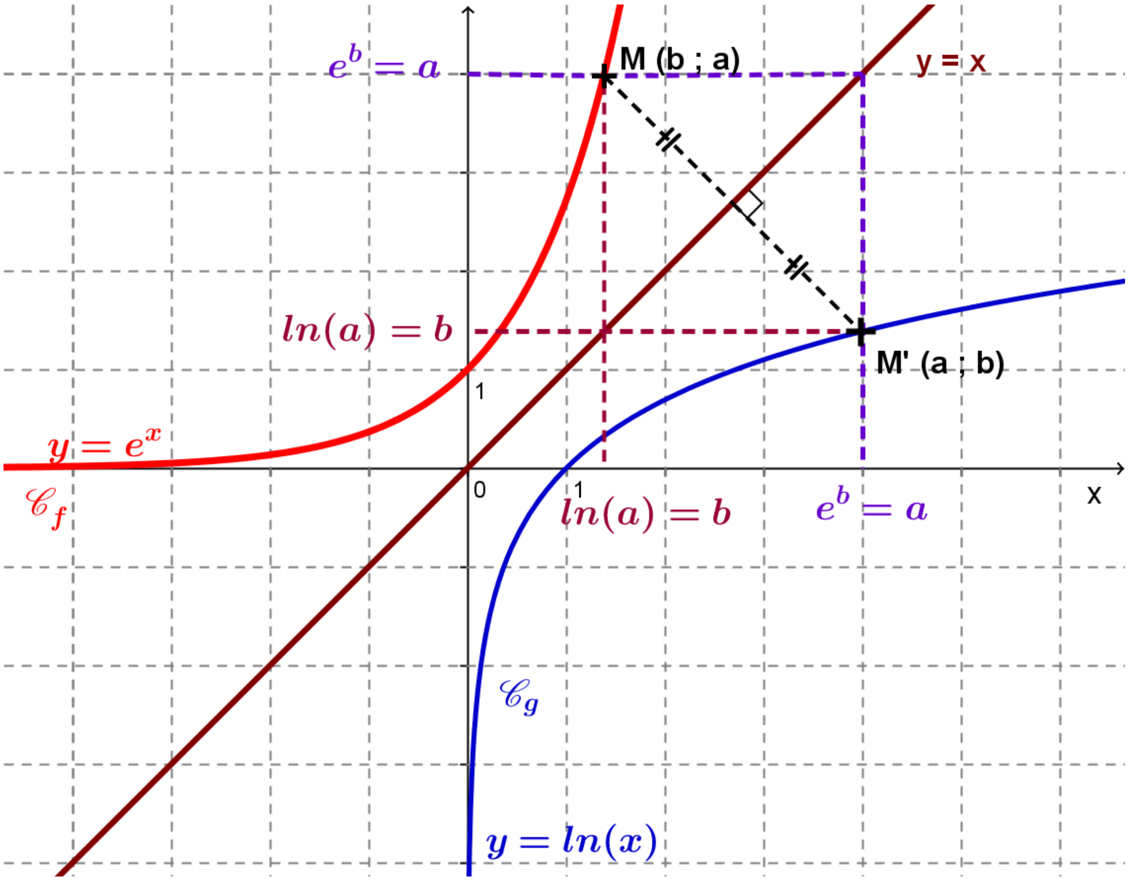
c) $4\,ln(x) = 3$ Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

elle est équivalente à: $ln(x) = \frac{4}{3}$ d'où $x = e^{\frac{4}{3}}$ **La solution est : S = {$e^{\frac{4}{3}}$}**

## c) Conséquence graphique

Dire que le point $M\,(b;a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle, ou encore si $a = e^b$ cela revient à dire, d'après le théorème précédent, que $b = ln\,a$ c'est-à-dire que le point $M'(a\,;b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Cela a pour conséquence que, dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$




## 4) Sens de variation

### Théorème :

**La fonction $ln$ est strictement croissante sur ]0 ; + ∞[**

**Démonstration**: Considérons deux nombres $u$ et $v$ strictement positifs tel que $\boldsymbol{u < v}$

Comme $u = e^{ln(u)}$ et $v = e^{ln(v)}$ alors cela revient à écrire: $e^{ln(u)} < e^{ln(v)}$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors on a forcément: $ln(u) < ln(v)$

Ce qui prouve que la fonction $ln$ est elle aussi strictement croissante sur $]0\,;+\infty.[$

**Conséquence**:

**Pour tout nombre réel $a$ et $b$ strictement positifs :**

- $\boldsymbol{ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b}$
- $\boldsymbol{ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b}$

# II) Propriétés de la fonction logarithme népérien

## 1) Propriétés de la fonction logarithme népérien

**Pour tout nombre réel $a$ et $b$ strictement positifs :**

- $\boldsymbol{ln(a \times b) = \ln(a) + ln(b)}$
- $\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)}$
- $\boldsymbol{ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - ln(b)}$
- $\boldsymbol{ln(a^n) = n\, ln(a)}$
- $\boldsymbol{ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\, ln(a)}$

**Pour tous nombres $a_1$, $a_2$, .......$a_n$ :**

$\boldsymbol{ln(a_1 \times a_2 \times \dots \dots . . \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)}$

## 2) Démonstrations:

- Montrons que $ln(a) + ln(b) = ln(a \times b)$

Pour tout nombre $a$ et $b$ strictement positifs :

$e^{ln(a)+ln(b)} = e^{ln(a)} \times e^{ln(b)}$ (Propriété de la fonction exponentielle)

Or $e^{ln(a)} \times e^{ln(b)} = a \times b$ donc : $\boldsymbol{e^{ln(a)+ln(b)} = a \times b}$

De plus $\boldsymbol{e^{ln(a \times b)} = a \times b}$ donc :

$\boldsymbol{e^{ln(a)+ln(b)} = e^{ln(a \times b)}}$ il en résulte :

$\boldsymbol{ln(a) + ln(b) = ln(a \times b)}$

- Montrons que $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$

Pour tout nombre $a$ strictement positif:

$ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = ln(1) = 0$

$ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = ln\left(\frac{1}{a}\right) + ln(a)$ (en utilisant la propriété précédente)

On obtient donc :

$ln\left(\frac{1}{a}\right) + ln(a) = 0$

D'où le résultat : $\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)}$

• Montrons que $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - ln(b)$

Pour tout nombre $a$ et $b$ strictement positifs :

$ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln(a)$

$ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right) + ln(b)$

On obtient donc :

$ln\left(\frac{a}{b}\right) + ln(b) = ln(a)$

D'où le résultat : $\boldsymbol{ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)}$

• Montrons que $ln(a^n) = n\, ln(a)$

Pour tout nombre $a$ strictement positif, montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $ln(a^n) = n\, ln(a)$

Soit $P_n$ la propriété: $ln(a^n) = n\, ln(a)$

**-** $P_0$ est vraie**.** En effet lorsque $n = 0$ on obtient : $ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \ln(a) = 0$ donc on a bien $P_0$ vraie

**-** Supposons que pour un entier naturel $n$ quelconque fixé on ait $P_n$ vraie c'est-à-dire

$ln(a^n) = n\, ln(a)$ on a donc

$ln(a^{n+1}) = ln(a^n \times a) = ln(a^n) + ln(a) = \; nl\, n(a) + ln(a) = (n+1)\, ln(a)$

On a bien *:* $ln(a^{n+1}) = (n+1)\, ln(a)$

Ce qui implique que $P_{n+1}$ est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n$ (non nul).

**- Donc pour tout entier naturel $n$,** $ln(a^n) = n\, ln(a)$

• Montrons que $ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\, ln(a)$

Pour tout nombre $a$ strictement positif:

$ln(a) = ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = ln(\sqrt{a}) + \; ln(\sqrt{a}) = 2\; ln(\sqrt{a})$

On obtient donc *:* $ln(\sqrt{a})$ **=** $\frac{1}{2}\, ln(a)$

• Pour tous nombres $a_1$, $a_2$, …….$a_n$ , montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $n \geq 2$, $ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)$

Soit $P_n$ la propriété: $ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)$

**-** $P_2$ est vraie**.** En effet lorsque $n = 2$ on obtient : $ln(a_1 \times a_2) = ln(a_1) + ln(a_2)$ (propriété 1) donc on a bien $P_2$ vraie

**-** Supposons que pour un entier naturel $n$, $n \geq 2$ quelconque fixé on ait $P_n$ vraie c'est-à-dire :

$ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)$ *on a donc*

$ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n \times a_{n+1}) = ln[(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) \times a_{n+1}] = ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) + ln(a_{n+1}) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n) + ln(a_{n+1})$ *On a bien*

$ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n \times a_{n+1}) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n) + ln(a_{n+1})$

Ce qui implique que $P_{n+1}$ est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n$ ($n \geq 2$).

**- Donc pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2,**
$ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \ldots .. \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)$

## 3) Exemples:

**Exemple 1** Résoudre l'équation suivante:

$ln(x) + ln(5) - 4 = 0$ Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

elle est équivalente à: $ln(5x) = 4$ d'où $5x = e^4$ On obtient donc : $x = \frac{e^4}{5}$

**La solution est: S =** $\{\frac{e^4}{5}\}$

**Exemple 2** Ecrire sous la forme $ln(2)$ et $ln(3)$: $ln(24)$ et $ln(\frac{16}{9})$

• $ln(24) = ln(3 \times 8) = ln(3) + ln(8) = ln(3) + ln(2 \times 2 \times 2) = ln(3) + ln(2) + ln(2) + \ln(2)$
$= ln(3) + 3\,ln(2)$ Donc $\boldsymbol{ln(24) = ln(3) + 3\,ln(2)}$

• $ln(\frac{16}{9}) = ln(\frac{2^4}{3^2}) = ln(2^4) - ln(3^2) = 4\,ln(2) - 2ln(3)$ Donc : $\boldsymbol{ln(\frac{16}{9}) = 4\,ln(2) - 2ln(3)}$

**Exemple 3** Résoudre l'équation suivante $ln(3x - 4) = 2$

Il faut que $3x - 4 > 0$ soit $x > \frac{4}{3}$ Cette équation n'est possible que pour $x > \frac{4}{3}$

$ln(3x - 4) = 2$ alors $3x - 4 = e^2$ donc $x = \frac{4 + e^2}{3}$ comme $\frac{4 + e^2}{3} > \frac{4}{3}$ alors

**La solution est: S =** $\{\frac{4 + e^2}{3}\}$

**Exemple 4:** Résoudre l'équation suivante $ln(x+2) = ln(x) + 1$

$x + 2 > 0$ soit $x > -2$ de plus il faut aussi que $x > 0$ il faut donc que $x > 0$

Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

$ln(x+2) = ln(x) + 1$ donc $ln(x+2) - ln(x) = 1$ ce qui implique que :

$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$ ce qui donne : $\frac{x+2}{x} = e^1$

$x + 2 = e\,x$

$x(1-e) = -2$

$x = \frac{-2}{1-e} = \frac{2}{e-1} > 0$

**La solution est: S = $\{\frac{2}{e-1}\}$**

**Exemple 5:** Résoudre l'équation suivante**:** $2e^{2x-1} = e^x$

$2e^{2x-1} = e^x$ on obtient donc:

$ln(2e^{2x-1}) = ln(e^x)$ on en déduit :

$ln(2) + \ln(e^{2x-1}) = ln(e^x)$

$ln(2) + 2x - 1 = x$

$2x - x = 1 - ln(2)$

$x = 1 - ln(2)$

**La solution est: S = $\{1 - ln(2)\}$**

**Exemple 6:** Résoudre l'équation suivante: $e^{2x} + 3\,e^x = 10$

Ce qui équivaut à : $(e^x)^2 + 3\,e^x = 10$

Posons $X = e^x$

Or pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $e^x$ >0 donc $X > 0$ on obtient alors :

$X^2 + 3X = 10$

$X^2 + 3X - 10 = 0$ Cette équation a pour solutions $X_1 = 2$ et $X_2 = -5$

Comme $X > 0$ alors l'unique solution est $X_1 = 2$ ($X_2 < 0$) ne peut être solution)

Donc $e^x = 2$

On obtient donc : $x = ln(2)$

**La solution est: S = $\{ln(2)\}$**

# III) Etude de la fonction logarithme népérien

## 1) Dérivée de la fonction $ln$

On admet que la fonction $ln$ est continue sur ]0 ;+∞[

### Théorème:

**La fonction $ln$ est dérivable sur ]0 ;+∞[et $ln'(x) = \frac{1}{x}$**

**Démonstration:**

On sait que pour tout $x > 0$ $e^{\ln(x)} = x$

Or, $(e^u)' = u'e^u$ et la fonction dérivée de $x$ est 1

Si $f(x) = x$ alors $f'(x) = 1$ donc $\left(e^{ln(x)}\right)' = 1$

On obtient donc : pour tout $x > 0$, $\left(e^{ln(x)}\right)' = (lnx)' \times e^{ln(x)} = 1$

Donc pour tout $x > 0$, $(lnx)' \times x = 1$ d'où

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

La fonction $ln$ est donc dérivable sur ]0 ; +∞[ et sa fonction dérivée est $\frac{1}{x}$

## 2) Limites de la fonction $ln$

### Théorème :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$

**Démonstration :**

Soit $f(x) = ln(x)$ sur ]0 ; +∞[ , $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(x) > 0$ sur ]0 ; +∞[
$f$ est donc croissante sur ]0 ; +∞[

• Soit M un nombre réel, la fonction $ln$ étant strictement croissante sur ]0 ; +∞[ alors pour tout $x > e^M$ , $ln(x) > ln(e^M)$, donc $ln(x) >$ M

Ce qui veut dire que pour tous les nombres $x$ suffisamment grands, tout intervalle ouvert de la forme ]M ; +∞[ contient toutes les valeurs de $f(x)$. Par conséquent: $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

• Soit $X = \frac{1}{x}$ alors lorsque $x$ tend vers 0 ($x > 0$), $X$ tend vers +∞

$ln(x) = ln(\frac{1}{X}) = -ln(X)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ln(x) = \lim\limits_{X \mapsto +\infty} -\ln(X) = -\infty$

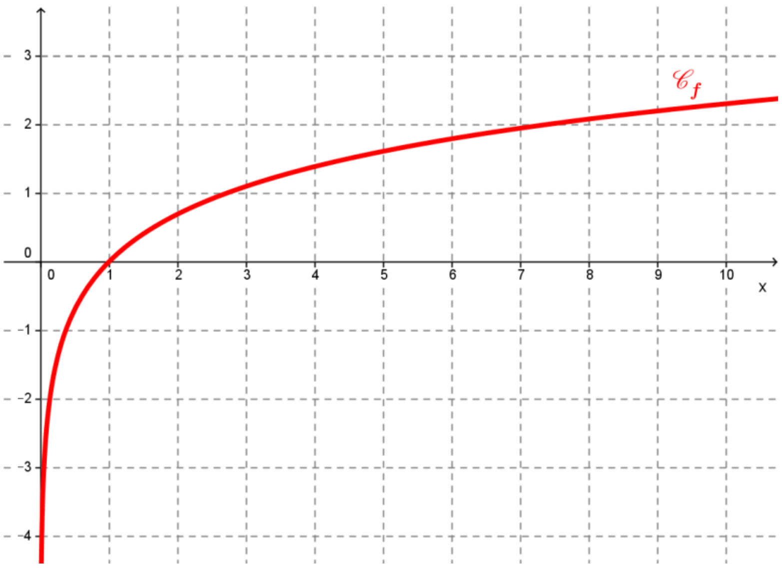
## 3) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction $ln$

### a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ln'(x)$ | \|\| | | | $+$ | | | |
| $ln(x)$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### b) Courbe représentative de la fonction $ln$




## 4) Limites importantes

### Théorème :

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x ln(x) = 0$

**Démonstration :**

• Comme $ln(1) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)-ln(1)}{x}$

On reconnait la limite, quand $x$ tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction $ln$ entre 1 et 1+$x$, limite égale au nombre dérivé de $ln$ en 1. Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = (ln)'(1) = 1$

• Déterminons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x}$

Posons $Y = ln(x)$ soit $x = e^Y$ alors $\frac{ln(x)}{x} = \frac{ln(e^Y)}{e^Y} = \frac{Y}{e^Y}$

Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $Y$ tend vers $+\infty$ et comme $\lim\limits_{Y \to +\infty} \frac{e^Y}{Y} = +\infty$

(voir chapitre fonction exponentielle)

Donc $\lim\limits_{Y \to +\infty} \frac{Y}{e^Y} = 0$

• Déterminons : $\lim\limits_{x \to +\infty} xln(x)$

En utilisant le même changement de variable : $Y = ln(x)$ soit $x = e^Y$

Lorsque $x$ tend vers 0, $Y$ tend vers $-\infty$ ( $\lim\limits_{Y \mapsto -\infty} e^Y = 0$)

$xln(x) = e^Y\, ln(e^Y) = Y\, e^Y$

$\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = \lim\limits_{Y \to -\infty} Y\, e^Y = 0$ (voir chapitre fonction exponentielle)

# IV) La fonction logarithme décimal

## Définition:

**La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur ]0 ; +∞[ par :**

$$\boldsymbol{log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}}$$

**Remarques :**

• Comme la fonction $log(x) = \frac{1}{ln(10)} \times ln(x)$ et $\frac{1}{ln(10)}$ >0 alors la fonction $log$ a le même sens de variation que la fonction $ln$

• La fonction $log$ a les mêmes propriétés et les mêmes limites que la fonction $ln$

## V) Etude de la fonction : $ln(u(x))$

• **Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $f$ définie sur l'intervalle I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a :**

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

• **Comme la fonction $u$ est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction $u'$**

• **Comme la fonction $ln$ est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de $f$ est le même que celui de $u$.**

• **Si $u(x)$ tend vers +∞ alors $ln(u(x))$ tend aussi vers +∞**

• **Si $u(x)$ tend vers 0 alors $ln(u(x))$ tend vers -∞**

• **Si $u(x)$ tend vers 1 alors $ln(u(x))$ tend vers $ln(1)$ c'est-à-dire 0**

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

**Exemple:** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 10)$

Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 3x + 10$

Dans notre exemple $f(x) = \ln(u(x))$

• **Déterminons , tout d'abord, son domaine de définition :**

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Delta = 9 + 4 \times 1 \times 10 = 49$ on a donc $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

$x^2 - 3x + 10 > 0$ pour $x < -2$ et $x > 5$

**La fonction $f$ est définie sur $]-\infty\,; -2[ \cup ]5\,; +\infty[$**

• Etudions les variations de $f$ :

$u'(x) = 2x - 3$ donc

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+10}$

$f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$ $\quad$ $u'(x) \geq 0$ pour $x \geq \frac{3}{2}$ et $u'(x) \leq 0$ pour $x \leq \frac{3}{2}$

En tenant compte du domaine de définition :
$f$ est donc décroissante sur$]-\infty\,; -2[$ et croissante sur $]5\,; +\infty[$

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{3}{2}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $-$ | ‖ | | $0$ | | ‖ | $+$ | |
| $ln(u(x))$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ | | | | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**Les courbes représentatives des fonctions $u$ et $f$ sont :**