Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

I) Théorème

	$q \leq -1$	**-1 < q < 1**	$q > 1$
$u_0 > 0$	**Pas de limite**	**Converge vers 0**	$+\infty$.
$u_0 < 0$			$-\infty$.

II) Cas particuliers :

- Si $q = 0$ alors $u_n = 0$ pour $n \geq 1$
- Si $q = 1$ alors $u_n = u_0$ pour $n \geq 1$

III) Démonstration

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$

◇ Cas où $q > 1$

Si $q > 1$ alors il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$

$q^0 = 1$

$q^1 = 1 + a$

$q^2 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + 2a$

$q^3 = (1+a)^3\ 1 + 3a + 3a^2 + a^3 \geq 1 + 3a$

etc …

En observant les résultats des premiers termes, nous remarquons que $q^n \geq 1 + na$

Montrons par récurrence que nous avons effectivement : $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier naturel n. Notons P_n cette propriété.

- **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ on obtient :

$q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$

- Supposons que pour **un entier n** quelconque **fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$q^n \geq 1 + na$

alors $q \times q^n \geq q(1 + na)$

par conséquent : $q^{n+1} \geq q(1 + na) \geq (1 + a)(1 + na)$

Comme $(1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + a^2 \geq 1 + na + a$ et comme $1 + na + a = 1 + (n + 1)a$

alors : $q^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

ce qui implique que P_{n+1} est vraie.

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n**

• **Donc pour tout entier naturel n, $q^n \geq 1 + na$**

Le nombre a étant strictement positif, $\lim\limits_{n\to+\infty}(na) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$

alors le théorème de comparaison permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n} = +\boldsymbol{\infty}$

Conclusion : Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$:

Si $u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = +\boldsymbol{\infty}$

Si $u_0 < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = -\boldsymbol{\infty}$

◇ Cas où -1 < q < 1 et $q \neq 0$

on pose : $p = \dfrac{1}{q}$

• Si 0 < q < 1 alors $\dfrac{1}{q}$ > 1 donc p > 1

Nous venons de démontrer que si p > 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$, le nombre p étant non nul

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{p^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n} = 0$

• Si -1 < q < 0 On pose $p = |q|$ et dans ce cas 0 < p < 1, d'après le résultat précédent :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{p^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |\boldsymbol{q}|^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{q^n} = 0$

◇ Cas où $q \leq$ -1 Lorsque $q \leq -1$, la suite est alternée elle n'a donc pas de limite

Exemple : si $q = -1$, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$

$u_1 = -u_0$ $u_2 = u_0$ $u_3 = -u_0$ $u_4 = u_0$

Plus généralement : si n est impair : $u_n = -u_0$ et si n est pair : $u_n = u_0$

Cette suite ne peut donc avoir de limite.

IV) Exemple

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}$$

Réponse :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

On observe que S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ on a donc :

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 1$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$