Limites de suites : Définitions

I) Limite finie

1) Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

	A	B	C	D
1		U0	4	
2		U1	3	
3		U2	2,5	
4		U3	2,25	
5		U4	2,125	
6		U5	2,0625	
7		U6	2,03125	
8		U7	2,015625	
9		U8	2,0078125	
10		U9	2,00390625	
11		U10	2,00195313	
12		U11	2,00097656	
13		U12	2,00048828	
14		U13	2,00024414	
15		U14	2,00012207	
16		U15	2,00006104	
17		U16	2,00003052	
18		U17	2,00001526	
19		U18	2,00000763	
20		U19	2,00000381	
21		U20	2,00000191	
22		U21	2,00000095	
23		U22	2,00000048	
24		U23	2,00000024	
25		U24	2,00000012	
26		U25	2,00000006	
27		U26	2,00000003	
28		U27	2,00000001	
29		U28	2,00000001	
30		U29	2	
31		U30	2	

Si on calcule, à l'aide d'un tableur, les valeurs de cette suite, on observe que plus n est grand, plus u_n se rapproche de 2 :

On conjecture que la limite de la suite u_n lorsque n tend vers $+\infty$ **est 2**

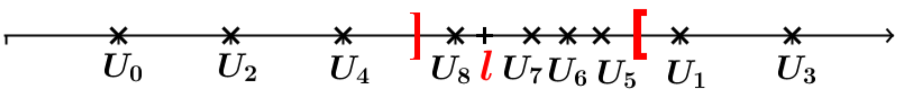
2) Définition

Etudier la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ ou que la suite (u_n) converge vers ℓ.

On écrira que : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$



Remarques :

• Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ (comme dans le tableur ci-dessus on voit qu'au bout d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de sa limite 2.

• On ne peut parler de limite d'une suite que lorsque n tend vers + ∞.

• Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel ℓ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

• Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel ℓ revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.

3) Propriété (admise)

Si une suite a pour limite un nombre réel ℓ, alors cette limite est unique.

4) Exemples

Montrer qu'une suite (u_n) converge vers ℓ (à l'aide de la definition) c'est montrer que pour tout réel a strictement positif on peut trouver un indice N tel que pour tout n > N u_n appartient à l'intervalle] $\ell - a$; $\ell + a$[

Exemples :

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $u_n = \dfrac{1}{n}$

Si on prend N entier supérieur à $\dfrac{1}{a}$ pour tout réel a strictement positif

alors pour tout n > N on a : $u_n < a$ d'où

$u_n \in$]-a ; a[pour tout réel a strictement positif ce qui prouve que la suite (u_n) converge vers 0.

De même si $v_n = 3 + \frac{1}{n}$ avec le même entier N, pour tout n supérieur à N

v_n appartient à] 3 – a ; 3 + a[pour tout réel a strictement positif

ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers 3.

Un autre exemple :

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$

Montrer qu'une suite (u_n) converge vers 2

Pour cela on étudie $\left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{-1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2}$

Pour avoir $\frac{1}{n+2} < a$ il faut avoir :

$1 < a(n+2)$

D'où : $\frac{1-2a}{a} < n$

Donc , pour N > $\frac{1-2a}{a}$ et pour tout entier n ≥ N on a : $|u_n - 2| < a$. Ce qui prouve que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Dans la pratique il est rare que l'on demande d'utiliser la définition pour démontrer la convergence d'une suite

II) Limite infinie

1) Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 + 3$

et (v_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 2\,v_n + 1 \end{cases}$$

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	3	-3
3	1	4	-5
4	2	7	-9
5	3	12	-17
6	4	19	-33
7	5	28	-65
8	6	39	-129
9	7	52	-257
10	8	67	-513
11	9	84	-1025
12	10	103	-2049
13	11	124	-4097
14	12	147	-8193
15	13	172	-16385
16	14	199	-32769
17	15	228	-65537
18	16	259	-131073
19	17	292	-262145
20	18	327	-524289
21	19	364	-1048577
22	20	403	-2097153
23	21	444	-4194305
24	22	487	-8388609
25	23	532	-16777217
26	24	579	-33554433
27	25	628	-67108865
28	26	679	-134217729
29	27	732	-268435457
30	28	787	-536870913
31	29	844	-1073741825
32	30	903	-2147483649
33	31	964	-4294967297
34	32	1027	-8589934593
35	33	1092	-17179869185
36	34	1159	-34359738369
37	35	1228	-68719476737
38	36	1299	-1,37439E+11
39	37	1372	-2,74878E+11

Si on calcule, à l'aide d'un tableur, les valeurs de ces deux suites, on observe que :

• plus n est grand, plus u_n devient grand

On conjecture que lorsque n tend vers $+\infty$, (u_n) diverge vers $+\infty$

• plus n est grand, plus $|v_n|$ tend vers $+\infty$.

Comme $v_n < 0$, on conjecture que lorsque n tend vers $+\infty$ (v_n) diverge vers $-\infty$

2) Définition

Soit (u_n) une suite.

• Si tout intervalle de la forme] A ; $+\infty$ [contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. On écrira $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

• Si tout intervalle de la forme] $-\infty$; A [contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$. On écrira $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Remarques:

• (u_n) tend vers $-\infty$ signifie que la suite (v_n) telle que pour tout entier n: $v_n = -u_n$ tend vers $+\infty$

• Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

3) Exemple

$u_n = n^2 + 3$ pour avoir u_n appartenant à $]A\ ;+\infty[$, il suffit de prendre $N > \sqrt{A}$

On a pour tout n > N : $u_n > A$, ce qui signifie que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A , aussi grand soit-il. Ce qui prouve que (u_n) diverge vers $+\infty$

Dans la pratique il est rare que l'on demande d'utiliser la définition pour démontrer la divergence d'une suite vers + ou – l'infinie

Remarque très importante :

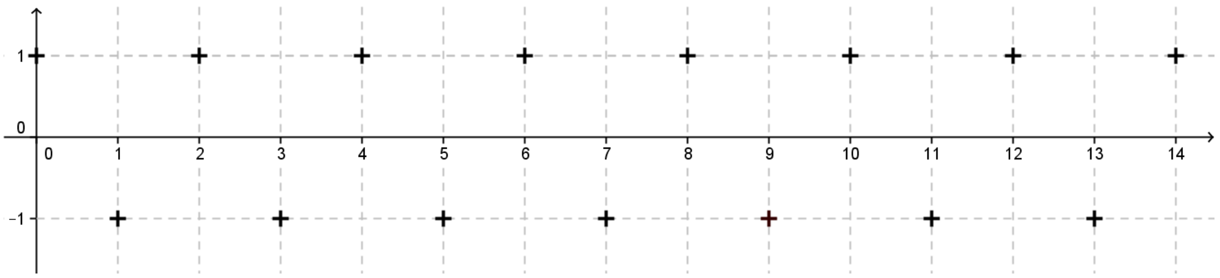
Une suite peut ne pas avoir de limite (finie ou infinie) on dit qu'elle diverge.

Comme par exemples :

• $\boldsymbol{u_n = (-1)^n}$

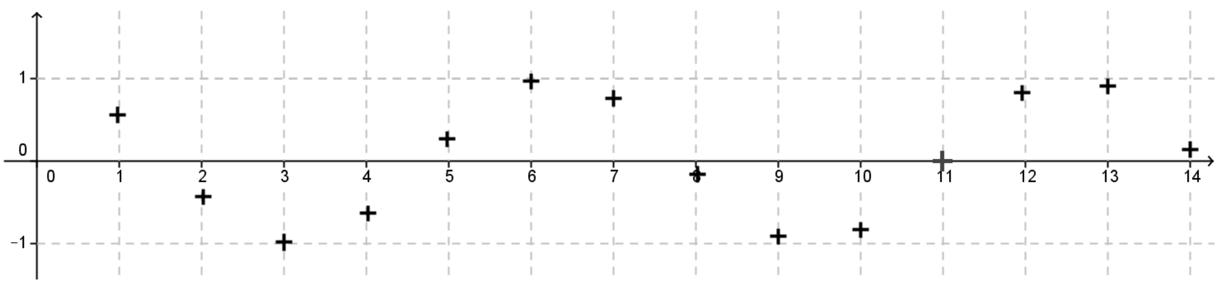
$u_0 = 1$ $u_1 = -1$ $u_2 = 1$ $u_3 = -1$ etc …….

Le graphique, ci-dessous, de la suite (u_n) montre clairement qu'elle ne peut avoir de limite :



• $\boldsymbol{v_n = \cos n}$

Le graphique, ci-dessous, de la suite (v_n) montre clairement qu'elle ne peut avoir de limite:



• Il en est de même pour la suite (w_n) : $w_n = \sin n$ et plus généralement une suite périodique n'a pas de limite sauf si elle est constante.