

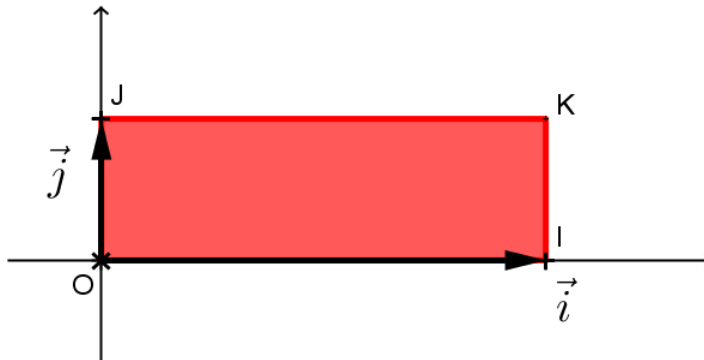
Notion d'intégrale. Propriétés.

I) Intégrale et valeur moyenne :

1) Unité d'aire :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal. Soit I, J et K les points de coordonnées respectives $(1; 0)$, $(0; 1)$ et $(1; 1)$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIJK.

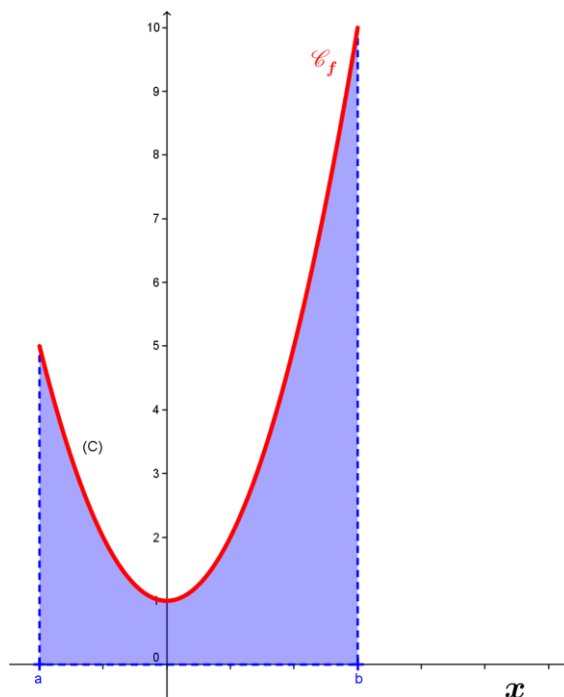


2) Intégrale d'une fonction positive :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On note (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de a à b de la fonction f , notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine situé sous la courbe (C) , c'est à dire l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



Remarque :

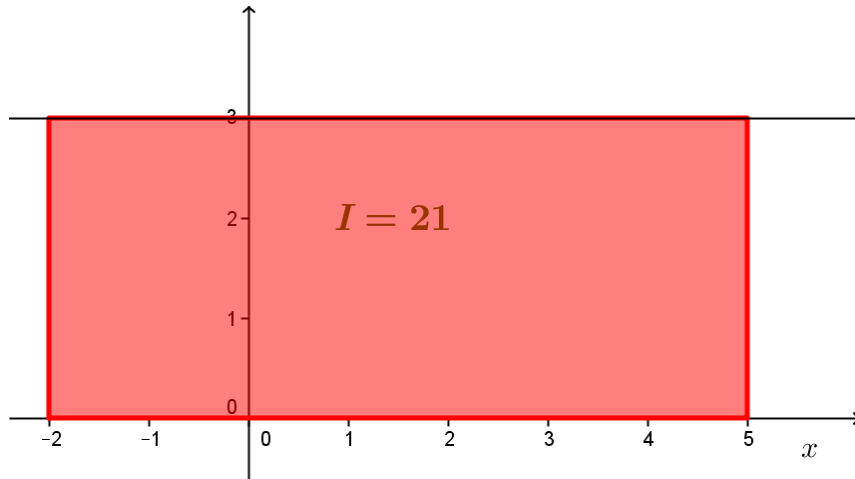
La variable x est dite muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Exemples :

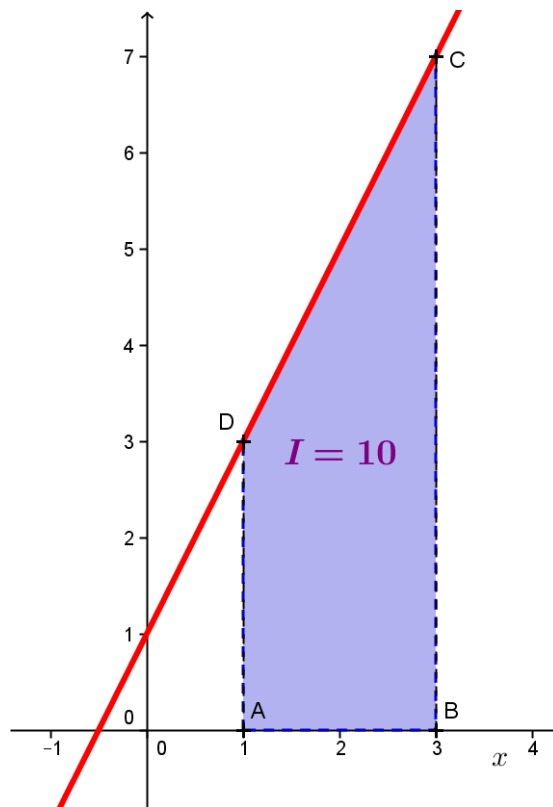
• Fonction constante :

Soit f définie par $f(x) = 3$ sur $[-2 ; 5]$. On a $\int_{-2}^5 f(x)dx = 3 \times 7 = 21$ unités d'aire.



• Fonction affine :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 2t + 1$. On a $\int_1^3 f(t)dt = 10$ unités d'aires. Cette intégrale représente l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :



• Fonction en escalier :

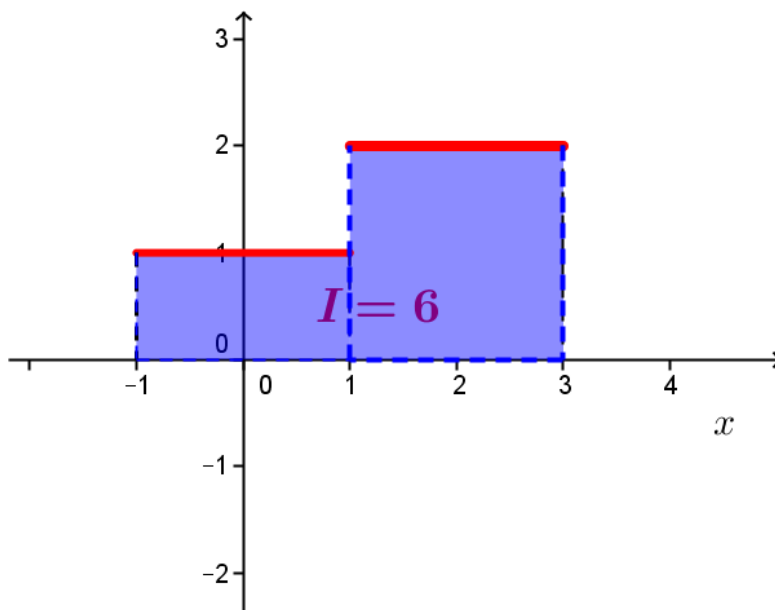
Soit f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue sur $[-1; 3]$

On définit néanmoins l'intégrale de -1 à 3 de f comme l'aire (en unités d'aire) du domaine situé sous la courbe, on la note encore $\int_{-1}^3 f(x)dx$

Et on a $\int_{-1}^3 f(x)dx = 2 + 4 = 6$ en unités d'aire (somme des aires des deux rectangles coloriés ci-dessous)



3) Intégrale d'une fonction quelconque :

a) Intégrale d'une fonction continue et négative sur [a ; b].

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note D le domaine compris entre (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de a à b de f est l'opposée de l'aire du domaine D .

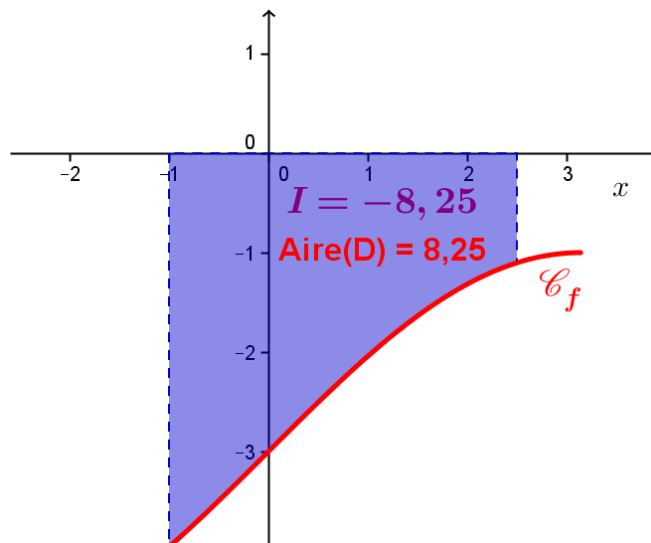
On note $\int_a^b f(x)dx = -\text{Aire}(D)$.

Remarque :

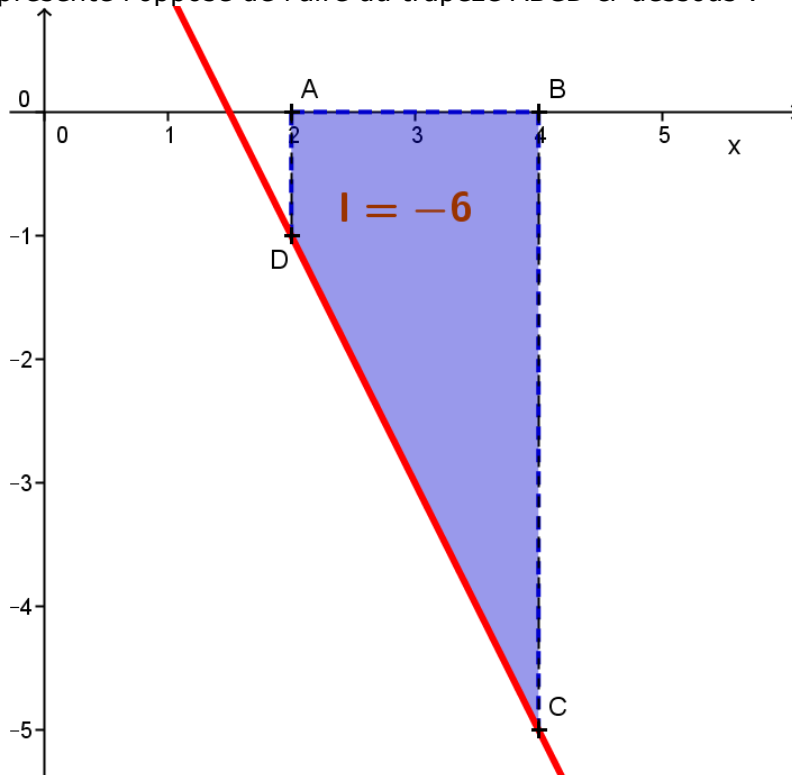
On dit parfois que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine D .

Exemple1 :

Sur la figure ci-dessous on a $\int_{-1}^{2.5} f(x)dx = -8,25$ et l'aire du domaine est Aire(D)= 8,25 unités d'aire

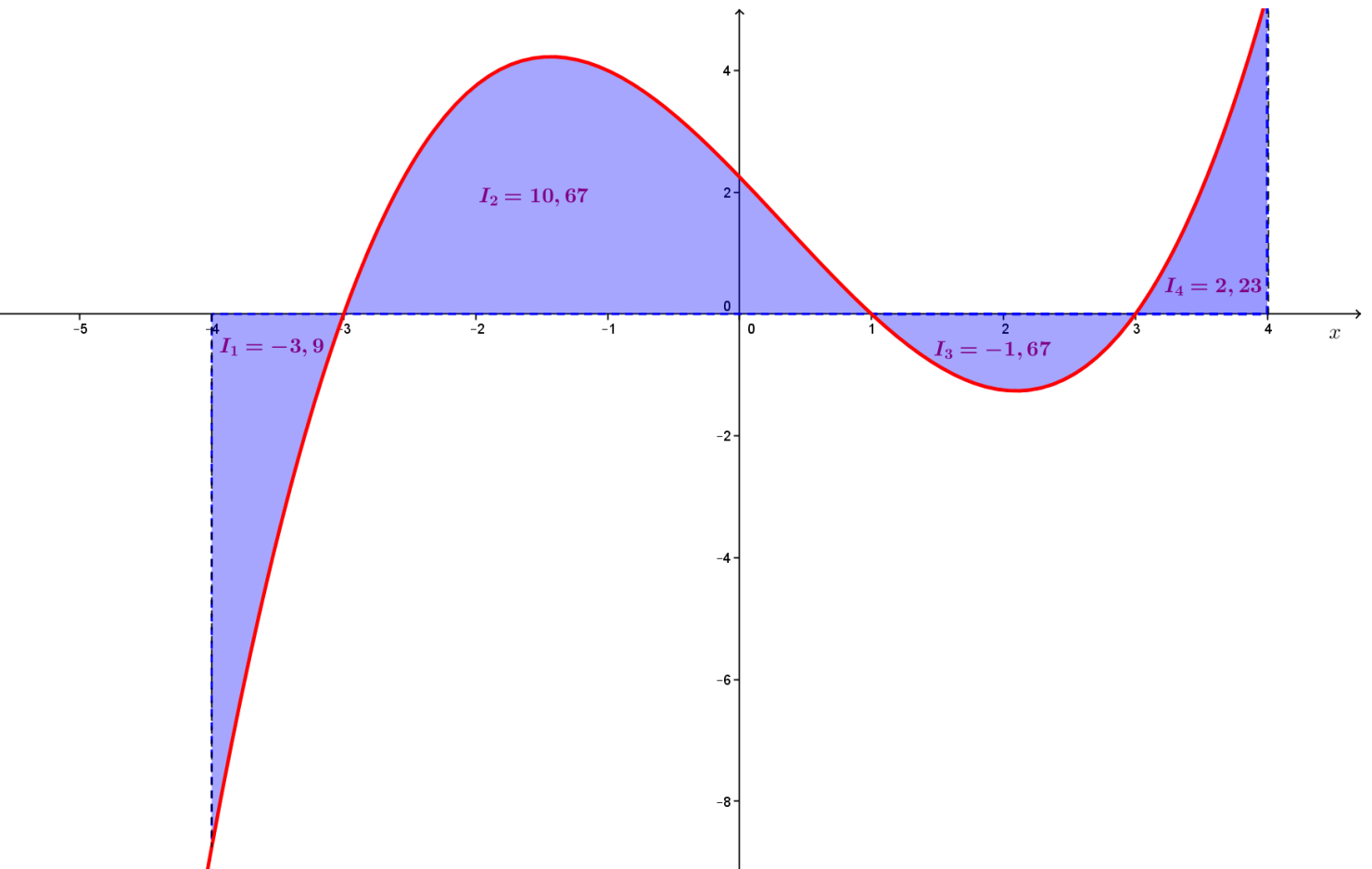
**Exemple2 :**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = -2t + 3$. On a $\int_2^4 f(x)dx = -6$ unités d'aires. Cette intégrale représente l'opposé de l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :

**b) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur [a ; b].**

Pour une fonction continue et de signe quelconque sur $[a ; b]$, on convient que l'intégrale de a à b de f est la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels $f(x)$ est de signe constant.

Exemple 1 :



Sur la figure ci-dessus est représentée la courbe de la fonction f et on a :

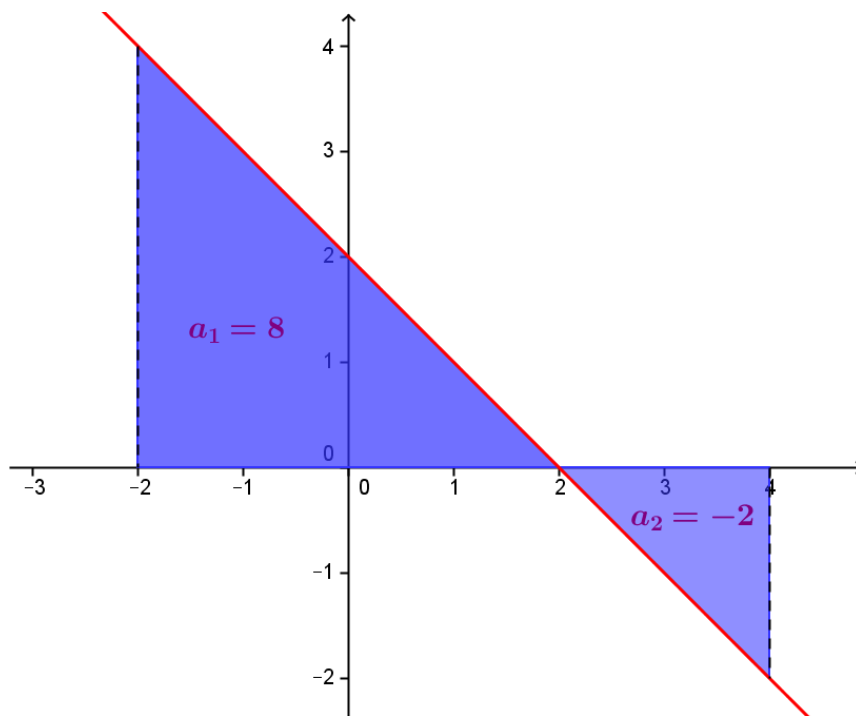
$$\int_{-4}^4 f(x)dx = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7,33. \text{ Ce nombre étant la } \text{somme des aires algébriques}$$

(**attention** ce nombre ne représente nullement l'aire coloriée qui vaut elle :

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 18,47 \text{ unités d'aire}).$$

Exemple2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = -t + 2$.



$$\text{On a } \int_{-2}^4 f(t) dt = a_1 + a_2 = 8 - 2 = 6$$

Mais :

L'aire coloriée vaut $8 + 2 = 10$ unités d'aires

II) Propriétés des intégrales

1) Intégrale de b à a d'une fonction continue avec $b > a$.

Pour une fonction f continue sur $[a; b]$, on a $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

Cas particulier :

Si f est continue sur $[a; b]$ alors pour tout réel $c \in [a; b]$ on a $\int_c^c f(x) dx = 0$

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$

2) Linéarité de l'intégrale :

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$

Pour tout réel k , on a : $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

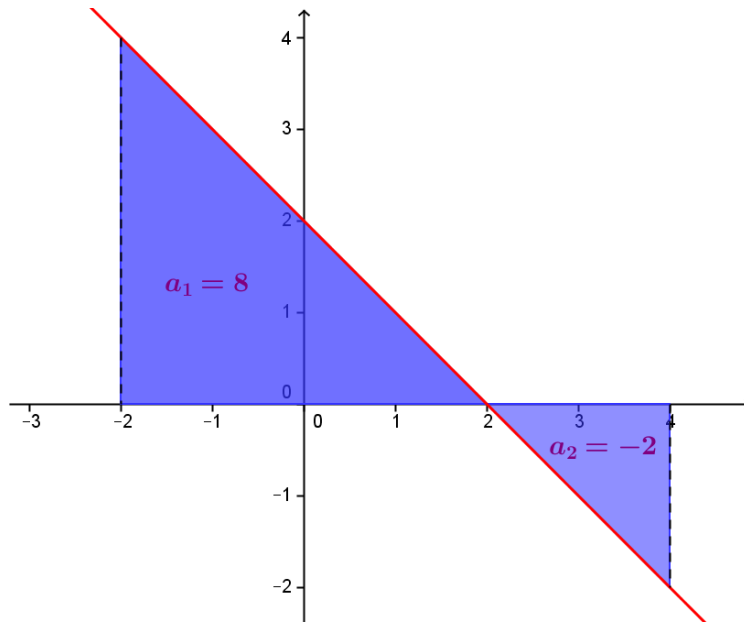
et $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

3) Positivité de l'intégrale:

- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Si l'intégrale est positive, la fonction f n'est pas forcément positive, de même si l'intégrale est négative, la fonction n'est pas forcément négative.

Exemple : on a vu précédemment la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = -t + 2$.



On a $\int_{-2}^4 f(t)dt = a_1 + a_2 = 8 - 2 = 6$

Pourtant f n'est pas positive sur $[-2; 4]$

d) Compatibilité avec l'ordre:

Si $f \leq g$ sur l'intervalle $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Remarque : attention la réciproque est fautive

Preuve:

Pour tout $x \in [a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$ d'où $(g - f)(x) \geq 0$.

La fonction $g - f$ est donc positive sur l'intervalle $[a; b]$ donc d'après la positivité, on a:

$$\int_a^b (g - f)(x)dx \geq 0.$$

et en utilisant la linéarité de l'intégrale on a

$$\int_a^b (g - f)(x)dx = \int_a^b (g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\text{D'où } \int_a^b (g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

Remarque : attention là encore la réciproque est fautive.

4) Relation de Chasles:

$$\text{Pour tout réel } c \in [a; b], \text{ on a : } \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

III) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

2) Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$

On note λ la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

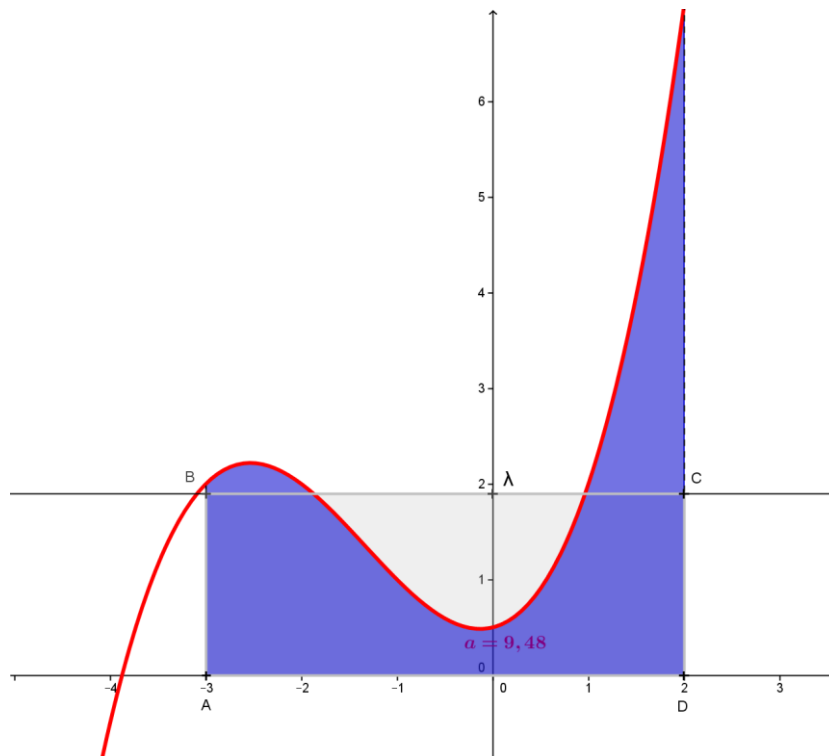
Comme $\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a).$$

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe de f est égale à l'aire du rectangle de dimensions λ et $(b-a)$.

Sur la figure ci-dessous on a $\int_{-3}^2 f(x)dx = 9,48$ donc $\lambda = \frac{9,48}{5} = 1,896$

L'aire coloriée en rose est égale à l'aire du rectangle ABCD

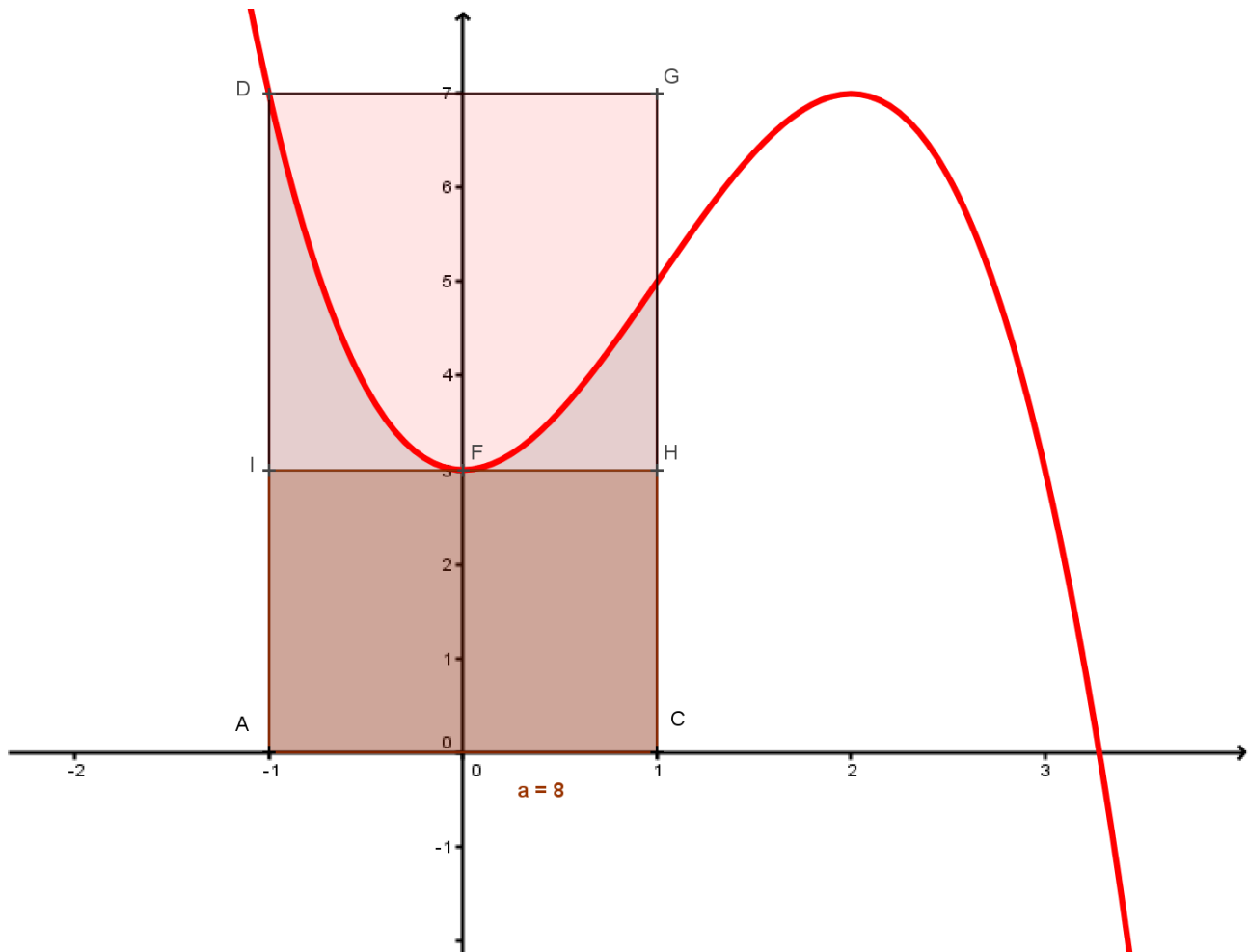


3) Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue et bornée sur $[a; b]$ donc il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$ $m \leq f(x) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique:



Sur la figure ci-dessus la fonction f est continue et bornée sur $[-1; 1]$ par $m = 3$ et $M = 7$

Ainsi on a l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[-1; 1]$ ($I = 8$) qui est comprise entre l'aire du rectangle ACHI et l'aire du rectangle ACGD :

$$3(1 - (-1)) \leq \int_{-1}^1 f(x)dx \leq 7(1 - (-1))$$

$$6 \leq \int_{-1}^1 f(x)dx \leq 14$$