Nombres complexes et application à la géométrie

I) Représentation graphique d'un nombre complexe

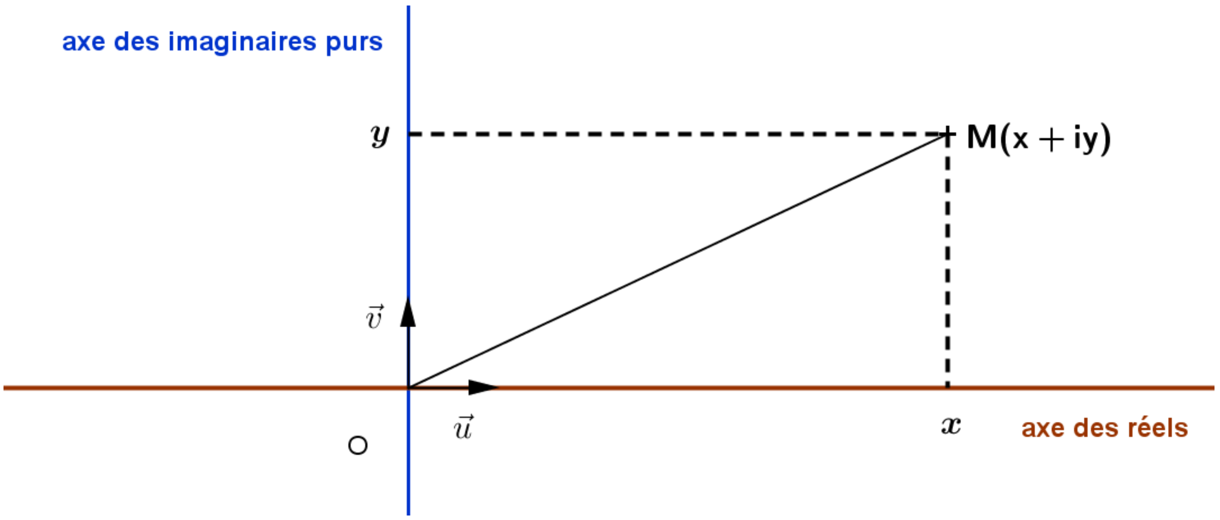
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

1) Affixe d'un point

a) Définition

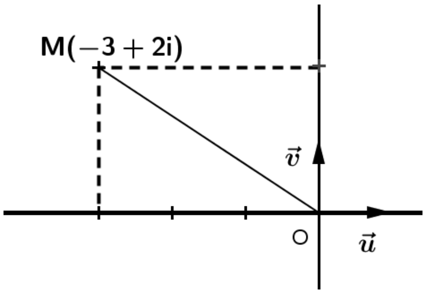
• Si M est le point de coordonnées (x ; y), l'affixe de M est le nombre $z_M = x + iy$

• Réciproquement si $z = x + iy$ où x et y sont deux nombres réels alors :
l'image de z est le point M(x ;y).



b) Exemple

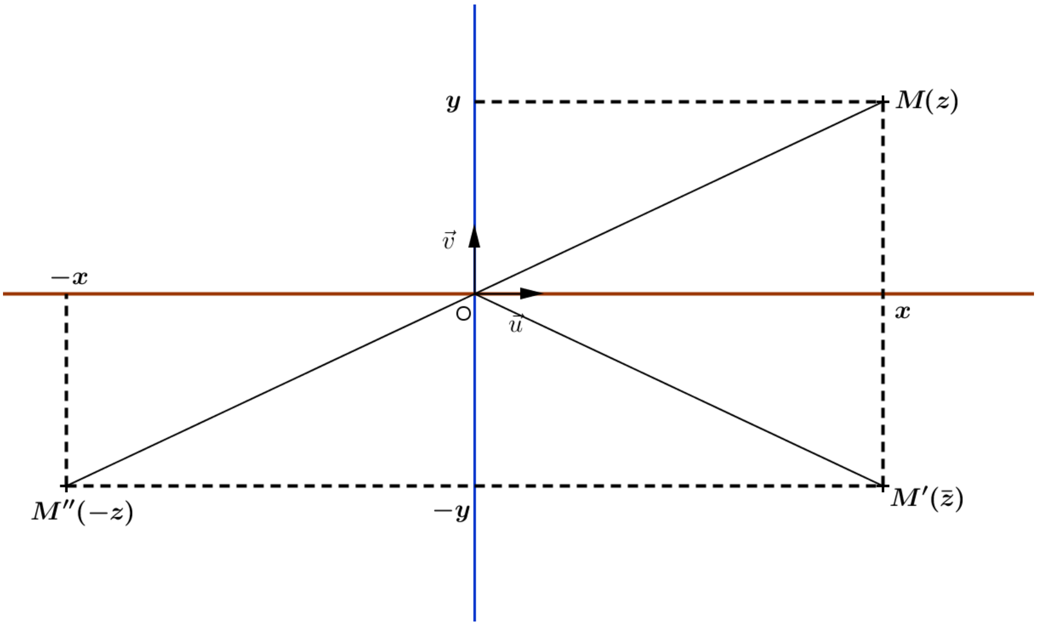
Soit $z = -3 + 2i$, l'image de z est le point M de coordonnées (-3 ; 2).



On dit aussi que $z = -3 + 2i$ est l'affixe du point M.

c) conséquences

- **M appartient à l'axe des abscisses équivaut à $Im(z) = 0$.**
- **M appartient à l'axe des ordonnées équivaut à $Re(z) = 0$.**
- **Les points $M'(\overline{z})$ et $M(z)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.**
- **Les points $M(z)$ et $M''(-z)$ sont symétriques par rapport au point O.**



Remarques:

L'axe des abscisses est appelé axe réel.

L'axe des ordonnées est appelé axe imaginaire.

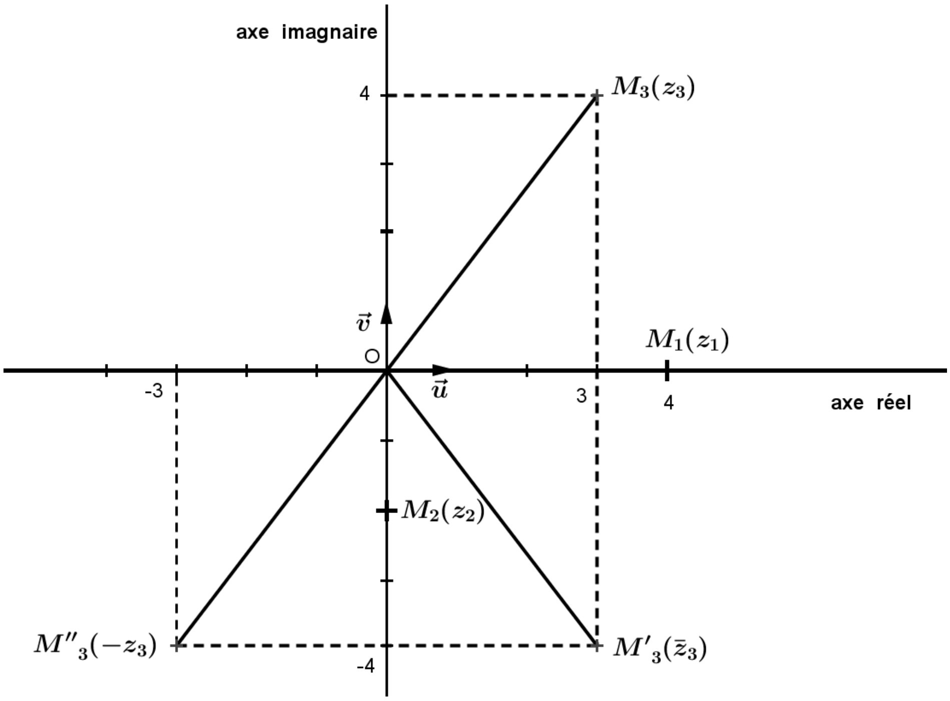
Exemples :

$z_1 = 4$

$z_2 = -2i$

$z_3 = 3+4i$; $\overline{z}_3 = 3-4i$ et $-z_3 = -3-4i$

Sur la figure ci-dessous nous avons tracé : $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; $M_3(z_3)$; $M'_3(\overline{z}_3)$ et $M''_3(-z_3)$

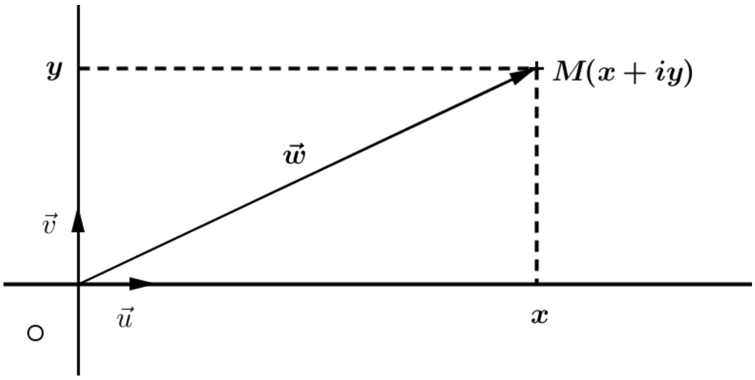


2) Affixe d'un vecteur

a) Définition

• Si $\vec{w}$ est le vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$, l'affixe de $\vec{w}$ est le nombre $z_{\vec{w}} = x + iy$

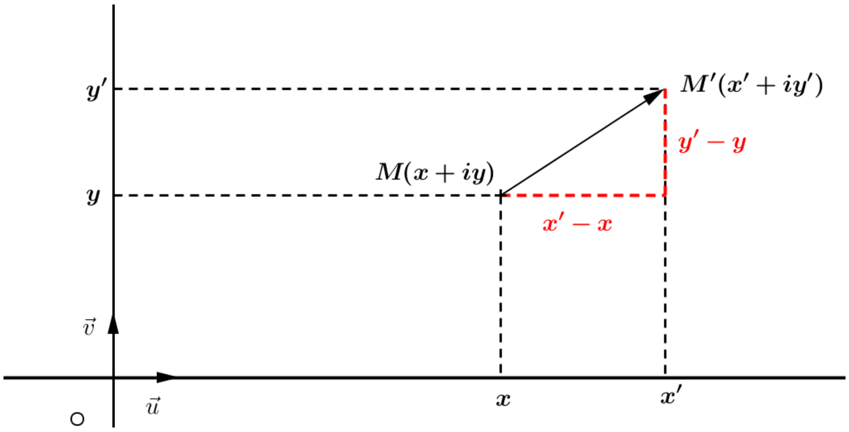
• A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$



b) Théorème

Si z_M et $z_{M'}$ sont les affixes des points M et M' dans un même repère orthonormé, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $z_{M'} - z_M$:

Affixe$(\overrightarrow{MM'}) = z_{M'} - z_M$.



Démonstration :

Si $z_M = x + iy$ et $z_{M'} = x' + iy'$ alors les coordonnées de M et M' sont respectivement $(x\ ;y)$ et $(x'\ ;\ y')$donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x\ ;\ y' - y)$

Donc , par définition, l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $(x' - x)\ +\ (y' - y)i$ soit $z_{M'} - z_M$.

Exemple :

M(3 ;-2) et M'(-5 ; 1)

$z_M = 3 - 2i \quad z_{M'} = -5 + i$

L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est donc : $-5 + i - (3 - 2i) = -5 + i - 3 + 2i = -8 + 3i$

L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $-8 + 3i$

3) Règle de calcul sur les affixes de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dux vecteurs d'affixes respectives z et z'

- **$\vec{w} = \vec{w}'$ équivaut à $z = z'$**
- **$\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$**
- **Pour tout réel k, $k\vec{w}$ a pour affixe kz**

Exemples :

Si l'affixe de $\vec{w}$ est $3 + 2i$ et l'affixe de $\vec{w}'$ est $5 - 4i$ alors l'affixe de $\vec{w} + \vec{w}'$ est :

$(3 + 5) + i(2 - 4)\ =\ 8 - 2i$ et l'affixe de $3\vec{w}$ est $9 + 6i$.

4) Affixe du milieu d'un segment

Si K est le milieu du segment [AB] alors z_K = $\frac{z_A + z_B}{2}$

Si K est le milieu du segment [AB] alors $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}$ soit $2(z_K - z_A) = z_B - z_A$

$2z_K - 2z_A = z_B - z_A$ d'où

$2z_K = z_B - z_A + 2z_A$ on obtient donc : $2z_K = z_B + z_A$ et donc :

$z_K = \frac{z_A + z_B}{2}$

Exemple :

Soit A le point d'affixe $z_A = -5 + 3i$ **et B le point d'affixe** $z_B = 6 - 4i$

alors l'affixe du point K milieu de [AB] est : $z_K = \frac{-5+3i+6-4i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

II) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$),

$z = a + ib$ est un nombre complexe non nul et M est le point d'affixe z.

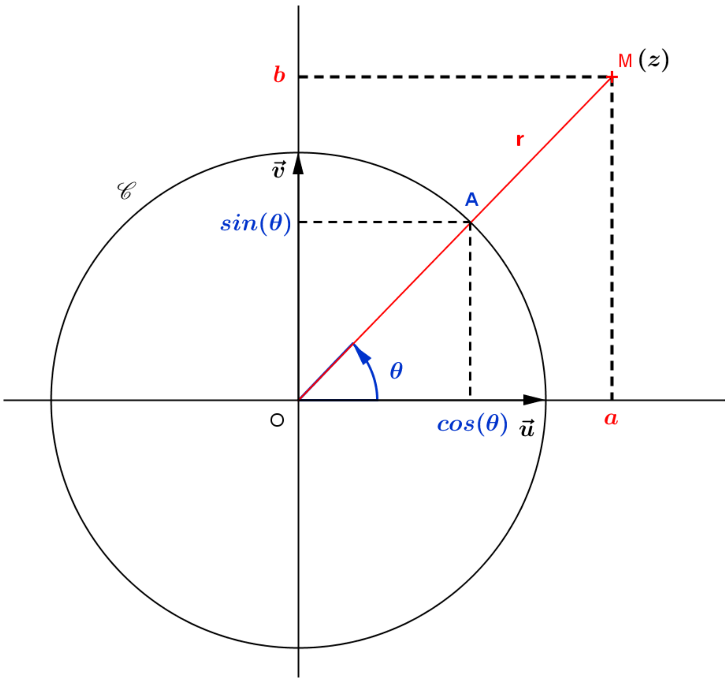
La demi-droite [OM) coupe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O en A

On note $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \theta$ et OM $= r$, (r est un nombre réel positif)

Ainsi le point A a pour coordonnées (cos θ ; sin θ)

Le nombre complexe $z = a + ib$, affixe de M, s'écrit aussi :

$z = r(cos\ \theta + isin\ \theta)$



1) Module d'un nombre complexe

z est un nombre complexe non nul, $z = a + ib$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$
Le module de z noté $|z|$, est la longueur OM c'est-à-dire :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = z\bar{z}$$

Remarques :

- **$|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.**
- **$|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z.**
- **Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\bar{z}$**

Exemple :

Soit z le nombre complexe : $z = 2 + i$ alors $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

2) Argument d'un nombre complexe

z est un nombre complexe non nul, $z = a + ib$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$
Soit M le point d'affixe z, un argument de z noté $\arg(z)$ est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$

Remarque :

Si θ est un argument d'un nombre complexe z non nul, alors tout nombre de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est un argument de z.

Au lieu d'écrire : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on écrit :
$\arg(z) = \theta$ (mod 2π)

mod 2π se lit : « modulo 2π »

Conséquences: Pour tout nombre complexe z non nul :

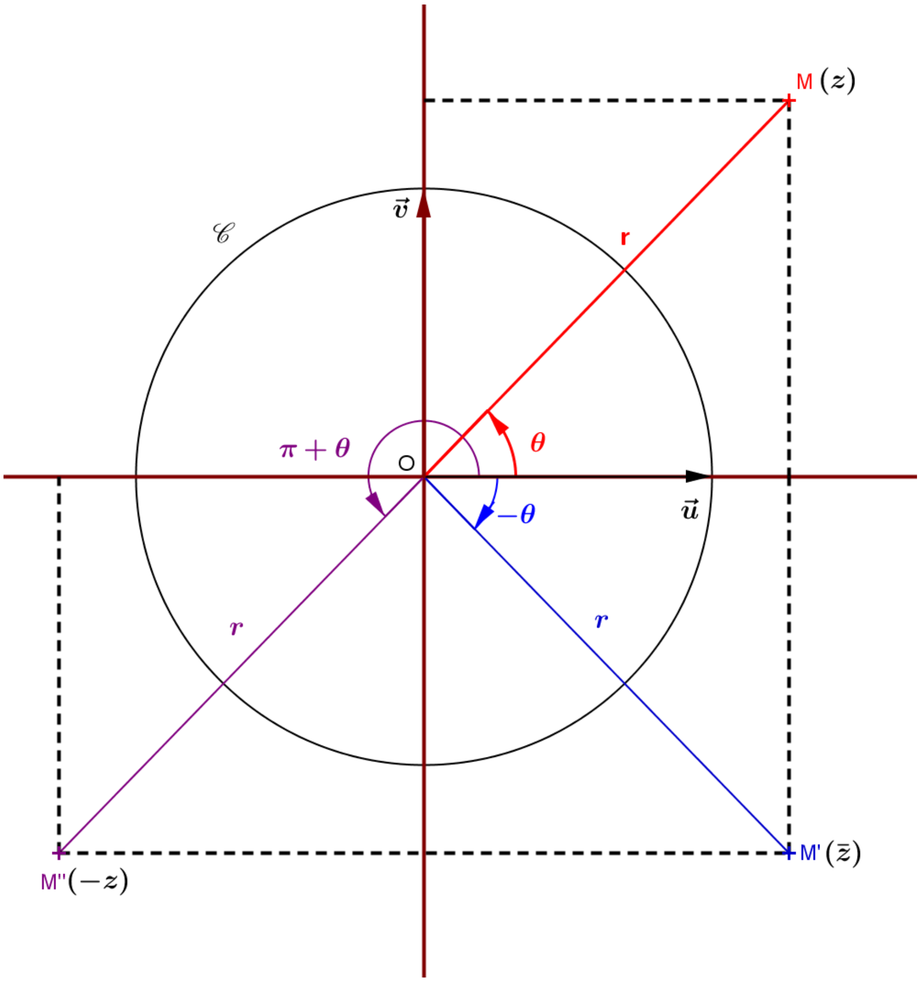
- Le nombre $z = 0$ n'a pas d'argument.
- Le nombre $z = 1$ a pour argument 0 (mod 2π).
- Et pour tout nombre complexe z non nul :

$arg(\bar{z}) = -arg(z)$ (mod 2π)

$|\bar{z}| = |z|$

$arg(-z) = arg(z) + \pi$ (mod 2π)

$|-z| = |z|$



3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a) Définition

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme :
$z = r(cos\theta + isin\theta)$ **(r étant un réel positif) où**
$r = |z|$ **et** $\theta = \arg(z)$ **(mod** 2π**) Cette écriture s'appelle forme trigonométrique de** z

b) Egalités de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique

Soit deux nombres complexes z **et** z' **non nuls**
Si $z = r(cos\theta + isin\theta)$ **et** $z' = r'(cos\theta' + isin\theta')$ **alors**
$z = z'$ **équivaut à :** $r = r'$ **et** $\theta = \theta'$ **(mod** 2π**).**

c) Lien entre la forme algébrique et trigonométrique

Soit z un nombre complexe qui peut s'écrire : $z = a + ib = r\,(cos\theta + i\,sin\theta)$ alors :

- **Si on connait r et θ on a: $a = r\,cos\theta$ et $b = r\,sin\theta$**
- **Si on connait a et b on a: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est défini par :**

$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemples

Exemple1 :

Soit z le nombre complexe tel que : $z = 1 - i$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

donc $\boldsymbol{\theta} = -\frac{\pi}{4}$ **(mod 2π)**

et comme $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

alors $z = 1 - i = \sqrt{2}((\cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4}))$

Exemple2 :

Soit z le nombre complexe tel que : $z = 4(cos\,\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$

Alors :$a = 4\,cos\,\frac{\pi}{3} = 2$ et $b = 4\,sin\,\frac{\pi}{3} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ et dans ce cas :

$\boldsymbol{z = 4(cos\,\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}) = 2 + 2\sqrt{3}i}$

Attention !!! Toute écriture de la forme $z = r(cos\theta + isin\theta)$ n'est pas la forme trigonométrique d'un nombre complexe z !!!!

Exemple : $z = -3(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$ n'est pas une forme trigonométrique car -3<0, pour que cette forme soit trigonométrique il suffit d'écrire :

$$z = 3(-cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}) = 3(\cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6})$$

d) Théorème

Si $z = r(cos\theta + isin\theta)$ avec $r > 0$ alors $z = r(cos\theta + isin\theta)$ est la forme trigonométrique de z avec: $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ (mod 2π)

Exemples :

Exemple 1 : Soit $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$,cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe z tel que : $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (mod 2π)

Exemple 2: Soit $z = 5(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$, z **n'est pas écrit sous forme trigonométrique** car la partie réelle doit être le cosinus d'un angle et la partie imaginaire le sinus **du même angle**, dans ce cas on cherche α tel que $\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$

On a donc $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\pi}{6}$ **(mod 2π)**

Donc $5(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}) = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ et $5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ est la forme trigonométrique de $5(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$

e) Module et argument d'un produit

Soit z et z' deux nombres complexes de forme trigonométrique :

$z = r(cos\theta + isin\theta)$ et $z' = r(cosa + isin\alpha)$ alors :

$|zz'| = |z||z'| = rr'$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (mod 2π)

Démonstration :

Soit $z = r(cos\theta + isin\theta)$ et $z' = r(cosa + isin\alpha)$

Posons $g(\theta) = z = r(cos\theta + isin\theta)$ et $g(\alpha) = z' = r'(cosa + isin\alpha)$

On a : $g(\theta)g(\alpha) = zz' = rr'(\ cos\theta + isin\theta)(\ cosa + isin\alpha)$

Or : $(\ cos\theta + isin\theta)(\ cosa + isin\alpha) = cos\theta cosa + +icos\theta sin\alpha + isin\theta cos\alpha + i^2 sin\theta sin\alpha$

$= \ cos\theta cosa - \ sin\theta sin\alpha + i(cos\theta sin\alpha + sin\theta cosa)$

On reconnait les formules d'addition du sinus et du cosinus :

On a donc :$(\ cos\theta + isin\theta)(\ cosa + isin\alpha) = \cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha) = g(\theta + \alpha)$

Et donc $g(\theta)g(\alpha) = zz' = rr'(\ \cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha))$

D'où : $|zz'| = \ |z||z'| = \ rr'$ **et** $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

f) Module et argument d'un quotient

Soit z et z' deux nombres complexes de forme trigonométrique :
$z = r(cos\theta + isin\theta)$ et $z' = r(cosa + isin\alpha)$ alors :

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{r}{r'}$ **et** $arg\ (\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$ **(mod 2π).**

Démonstration :

Comme $arg(1) = 0$ et $|1| = 1$ car $1\ = 1(cos(0) + isin(0))$

Alors $\arg(1) = \ \arg(z \times \frac{1}{z}) = \arg(z) + \arg(\frac{1}{z})$ (mod 2π)

Alors $0 = \arg(z) + \arg(\frac{1}{z})$ (mod 2π) et on obtient donc :

$arg\ (\frac{1}{z}) = -\arg(z)$ (mod 2π)

Par conséquent :

$arg\ (\frac{z}{z'}) = arg\ (\ z \times \frac{1}{z'}) = \arg(z) + arg\ (\frac{1}{z'})$ (mod 2π)

Et donc : $arg\ (\frac{z}{z'}) = \ \arg(z) - \arg(z')$ (mod 2π)

g) Propriétés

- **Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument (à 2π près)**
- **0 n'a pas d'argument et $1\ = 1 + i0\ =\ cos(0)\ +\ isin(0)$ donc $arg(1)\ =\ 0$ (mod 2π).**

4) Interprétation géométrique du module et de l'argument :

a) Distance de deux points

Si, dans un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors : AB = $|z_B - z_A|$

b) Angle d'un vecteur avec $\vec{u}$

Si, dans un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B alors : $(\vec{u},\overrightarrow{AB})= \arg(z_B - z_A)$ (mod 2π)

Exemple :

Soit A le point d'affixe $z_A = 3 + i$ et B le point d'affixe $z_B = 1 + 3i$ On a :

$z_B - z_A = -2 + 2i$ donc

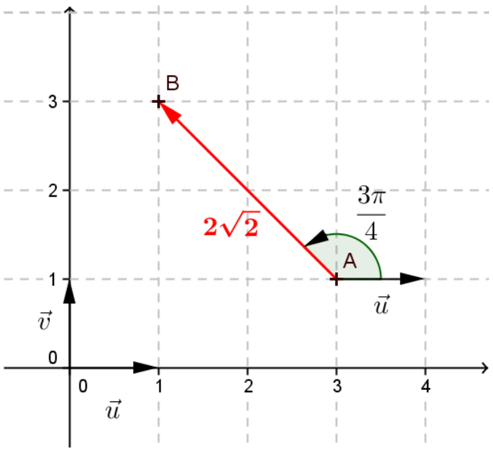
$|z_B - z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = \theta$ (mod 2π) avec :

$$cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\,\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (mod 2π)

$(\vec{u},\overrightarrow{AB})= \frac{3\pi}{4}$ (mod 2π)



III) Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Les propriétés sur les modules et arguments d'un produit de deux nombres complexes précédemment démontrées (paragraphe 3)e) nous montre que les arguments suivent les mêmes lois que celles de l'exponentielle d'où le prolongement de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

Soit $g(x) = \cos(x) + i\sin(x)$

On s'aperçoit que g suit la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle.

$g(0) = 1$ et $g(zz') = g(z) + g(z')$

C'est la raison pour laquelle on a prolongé la définition de la fonction exponentielle définit sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel θ :

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

1) Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$

2) Définition2 : Cas général

• **Soit z un nombre réel non nul de module r et d'argument θ, alors l'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée notation exponentielle du nombre complexe z .**

• **Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif, alors $|z| = r$ et arg(z) = $\theta + k.2\pi \;\; (k \epsilon \mathbb{Z})$.**

Exemples

$z = 2 + 2i = 2(1+i) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z = -1 = e^{i\pi}$

Ainsi on peut remarquer que $e^{i\pi}+1 = 0$

3) Propriétés

Avec cette notation les propriétés vues précédemment concernant les modules et les arguments s'écrivent :

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\alpha}$ où r et r' sont des réels strictement positifs :

- $zz' = rr'e^{i(\theta+\alpha)}$
- $z^n = r^n\, e^{in\theta}$ **pour tout n entier naturel non nul**
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\alpha)}$
- $\overline{z} = r\, e^{-i\theta}$

Exemples :

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$zz' = 6e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{z}{z'} = \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

$z^{12} = 2^{12}e^{i\frac{12\pi}{3}} = 2^{12}e^{4i\pi} = 2^{12} = 4\,096$