Probabilités conditionnelles et indépendance

I) Conditionnement par un événement

1) Probabilité de B sachant A

a) Définition

On considère un univers U d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité associée.

Soit A un événement de probabilité $P(A)$ non nulle et B un événement.
La probabilité de B sachant que A est réalisé est le réel noté $P_A(B)$ défini par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarques :

1) $P_A(B)$ est la probabilité conditionnelle de B relative à A.

2) $P_A(A) = 1$

Exemple :

On considère une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher, 7 d'entre elles sont blanches et 3 sont noires. Parmi les boules blanches 5 portent le numéro 1 et parmi les boules noires 1 seule porte le numéro 1

L 'expérience aléatoire consiste à extraire une boule de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « la boule extraite est blanche »

B : « la boule extraite porte le numéro 1»

On a $\boldsymbol{P(A)} = \frac{7}{10}$ et $\boldsymbol{P(B)} = \frac{6}{10}$
de plus $A \cap B$: « la boule extraite est blanche et porte le numéro 1 donc $\boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{5}{10}$
de là $P_A(B) = \frac{5}{7}$

b) Propriété

On considère l'univers fini U = { e_1, e_2, …..,e_n } d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité associée. Soit A un événement de probabilité non nulle.

La fonction qui à tout événement $\{e_i\}$ associe $P_A(e_i)$ pour tout i entier compris entre 1 et n est une loi de probabilité sur l'univers U ; elle est appelée probabilité conditionnelle relative à A.

Démonstration :

Par définition pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $P_A(e_i) = \frac{P(A \cap \{e_i\})}{P(A)}$ donc on a :

- $P_A(e_i) = 0$ si e_i n'appartient pas à A

• $P_A(e_i) = \frac{P(e_i)}{P(A)}$ si e_i appartient à A ; on désigne alors par J l'ensemble des indices i tels que les évènements élémentaires e_i composent A.
Il en résulte que $P_A(e_i)$ est un nombre réel compris entre 0 et 1 et que l'on a bien :

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_A(e_i) = \sum_{i\in J} \frac{P(e_i)}{P(A)} = \frac{1}{p(A)} \sum_{i\in J} P(e_i) = 1$$

Conséquences :

$P_A(U) = 1$; $P_A(\emptyset) = 0$; $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ et en particulier $P_A(\bar{A}) = 0$

c) Probabilité d'une intersection

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On a

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)}$

d) Propriété

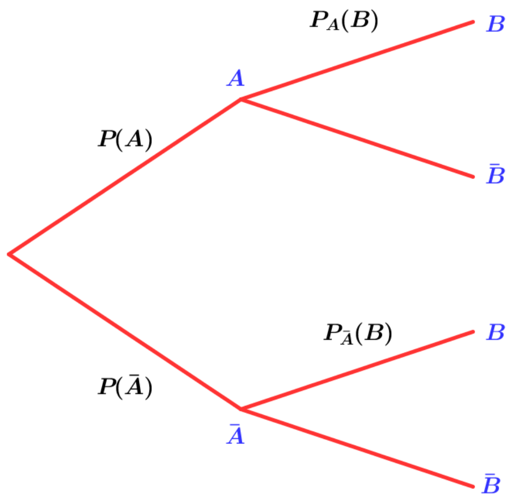
Soit A un événement de probabilité non nulle et différente de 1. Alors pour tout événement B on a :

$\boldsymbol{P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}$

Arbre pondéré : On peut illustrer cette situation avec un arbre pondéré :

• Les probabilités de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont les produits des probabilités portées le long des branches aboutissant en B

• La probabilité de B est la somme de ces deux probabilités



Exemple :

Un grossiste en melons a deux fournisseurs, le fournisseur A chez qui il achète 70 % des melons qu'il vend et un autre fournisseur chez qui il achète le reste.

Il constate que 5 % des melons du fournisseur A et que 20 % des melons du fournisseur B ne pas assez fruités .

Il choisit un melon dans son étal.

On note :

A l'événement « le melon choisi provient du fournisseur A »

B l'événement « le melon choisi n'est pas assez fruité »

a) Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre

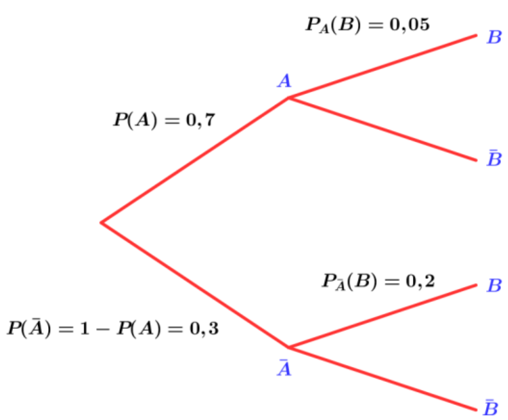
b) Donner la probabilité que le melon choisi provienne du fournisseur A et ne soit pas assez fruité

c) Donner la probabilité que le melon choisi ne soit pas assez fruité.

d) Sachant que le melon choisi n'est pas assez fruité quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur A ?

Réponses :

a) Arbre pondéré



b) On cherche $P(A \cap B)$ = $P(A) \times P_A(B)$ = 0,7× 0,05 = 0,035 (3,5 %)

c) On cherche $P(B)$:
On sait que $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ donc
$P(B)$ == 0,7× 0,05 + 0,3 ×0,2 = 0,095 (9,5 %)

d) On cherche $P_B(A) = \frac{P(B\cap A)}{p(B)} = \frac{0,035}{0,095} \approx 0,384$ (38,4 %)

2) Probabilités totales

a) Définition : Partition de l'univers

Soit n un entier naturel. On dit que les n événements $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ forment une partition de l'univers U s'ils sont disjoints deux à deux et si leur réunion forme l'univers U.

Exemples :

a) A et $\bar{A}$ forment pour tout événement A une partition de U

b) Considérons un jeu de cartes et l'expérience consistant à extraire au hasard une carte de ce jeu. Les événements :

A : « la carte extraite est une carte de pique »

B : « la carte extraite est une carte de coeur »

C : « la carte extraite est une carte de carreau »

D : « la carte extraite est une carte de trêfle »

forment une partition de l'univers.

b) Propriété

Si $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ forment une partition de l'univers U et si pour tout i compris entre 1 et n, $P(A_i) \neq 0$ alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Cette égalité est nommée loi de probabilités totales

Exemple :

Dans un lycée il y a 4 classes de terminale S avec 4 professeurs M_1, M_2, M_3, M_4.

Lors des devoirs communs les élèves constatent que la probabilité qu'un sujet sur les suites « tombe » dépend du professeur rédacteur du devoir.

Il savent que :

M_1 rédige le devoir 1 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 2

M_2 rédige le devoir 3 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 4

M_3 rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est toujours présent

M_4 rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 3

On appelle :

M_i l'événement « le rédacteur du sujet est le professeur M_i »

S l'événement « le sujet sur les suites est présent dans le devoir »

Calculer la probabilité de S

Réponse :

D'après la loi des probabilités totales on a :
$P(S) = P(M_1) \times P_{M_1}(S) + \ P(M_2) \times P_{M_2}(S) + P(M_3) \times P_{M_3}(S) + \ P(M_4) \times P_{M_4}(S)$
Soit :
$P(S) = \ \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \ \frac{1}{10} \times 1 + \ \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{23}{60}$

II) Indépendance de deux événements

1) Définition

On considère un univers U d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité associée.

On dit que les événements A et B sont indépendants lorsque :
$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Remarque :

Lorsque $P(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$ c'est à dire si la probabilité de réalisation de B n'est pas modifiée par la réalisation de A.

De même si $P(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si $P_B(A) = P(A)$

Exemple :

On considère l'expérience consistant à jeter un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note :

A l'événement « la face visible porte un numéro pair »

B l'événement « la face visible porte un numéro multiple de 3 »

On a donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Comme $A \cap B = \{ 6 \}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ de là on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants

2 Propriété

Si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ le sont aussi

Démonstration :

Calculons $P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) \times (1 - P(B))$

$P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) - P(A) \times P(B)$

comme A et B sont indépendants $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

donc $P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

or $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ donc $P(A) \times P(\bar{B}) = \ P(A \cap \bar{B})$

les événements A et $\bar{B}$ sont bien indépendants.

Remarque :

A et B jouant des rôles symétriques $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Conséquence :

Si A et B sont indépendants $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.