Loi normale

I) Loi Normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$

1) Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit qu'elle suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ si elle admet pour densité la fonction φ définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

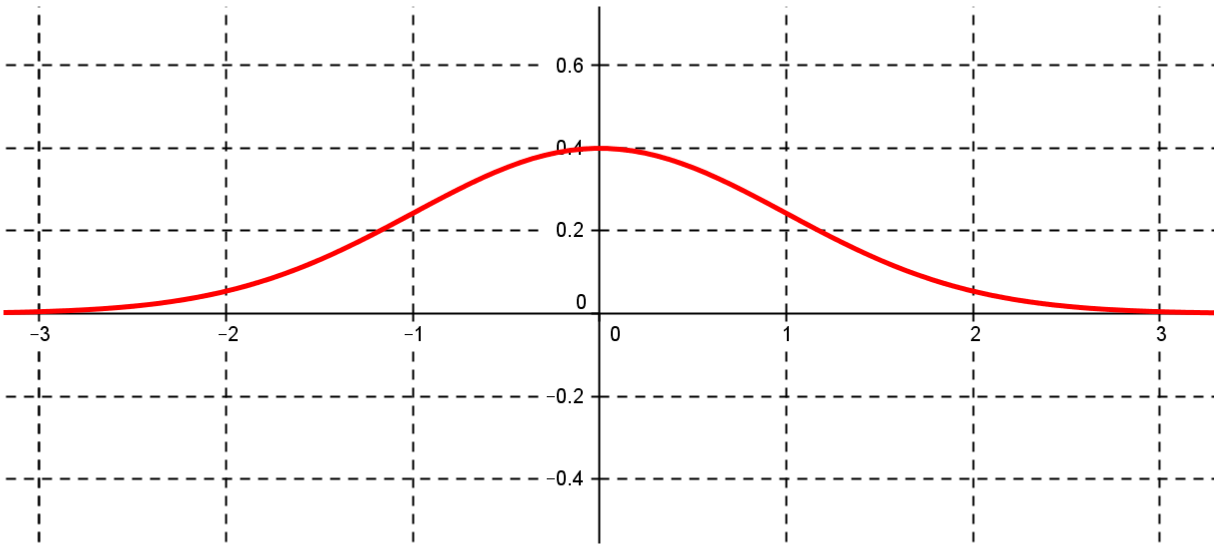
. On notera $X \sim \mathcal{N}(0 ; 1)$

Remarques :

- La fonction φ est continue et à valeurs strictement positives sur ℝ
- Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- L'aire du domaine situé sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses vaut 1 (admis)

Donc on peut en conclure que la fonction φ peut bien être considérée comme densité de probabilité sur ℝ.

Courbe de la fonction φ

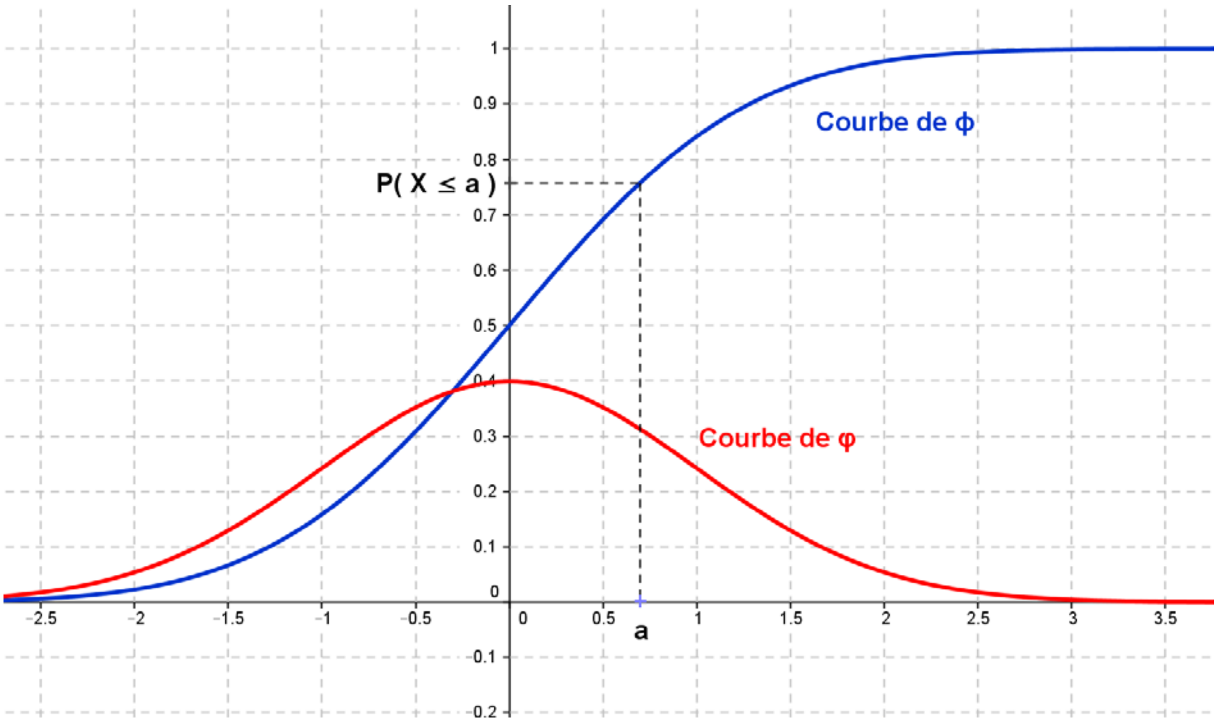


2) Théorème 1

Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$, sa fonction de répartition Φ est définie par :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \varphi(t)dt$

Représentation graphique :



Propriétés :

● Pour tout réel x on a $\Phi\ (-\ x)\ =\ 1\ -\ \Phi\ (x)$

● Si X suit une loi normale $\mathcal{N}$ (0 ; 1), pour tous a et b réels avec a ≤ b on a
P(a ≤ X ≤ b) = Φ (b) – Φ (a)

Remarque importante :

Les valeurs prises par une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}$(0 ; 1) ne s'obtiennent qu'à l'aide d'une calculatrice ou d'une table de valeurs de la fonction Φ

La calculatrice permet seulement le calcul de P (a ≤ X ≤ b), si on veut calculer P(X ≤ b) il faut procéder de la façon suivante :

● Si $b \geq 0$ P($X \leq b$)= 0,5+ P ($0 \leq X \leq b$)

● Si $b \leq 0$ P($X \leq b$)= 0,5 – P ($b \leq X \leq 0$)

La table de valeurs de Φ ne donne que les valeurs de P($X \leq b$) pour b ≥ 0,
pour b ≤ 0 utiliser Φ (– X) = 1 – Φ (X)

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}$(0 ; 1)

1) Calculer P(– 0,53 ≤ X ≤ 1,3)

Avec la calculatrice on obtient P(– 0,53 ≤ X ≤ 1,3) ≈ 0,60514

Avec la table de valeurs
P (– 0,53 ≤ X ≤ 1,3) = Φ (1,3) – Φ (– 0,53) = Φ (1,) – (1 – Φ (0,53))
≈ 0,9032 – 1 +0.7019 ≈ 0,6051

2) Calculer P (X ≤ 1,7)

Avec la table on obtient immédiatement P (X ≤ 1,7) ≈ 0,9554

Avec la calculatrice P (≤ 1,7) = 0,5 + P (0 ≤ X ≤ 1,7)

≈ 0,5 + 0,4554 ≈ 0,9554

3) Théorème 2

L'espérance d'une variable X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$(0 ;1) est E(X) = 0

La variance de X est 1 donc son écart type σ est 1

4) Théorème 3

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}$ (0 ; 1) , alors pour tout $\alpha \in]\,0\,;1\,[$ il existe un unique réel positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

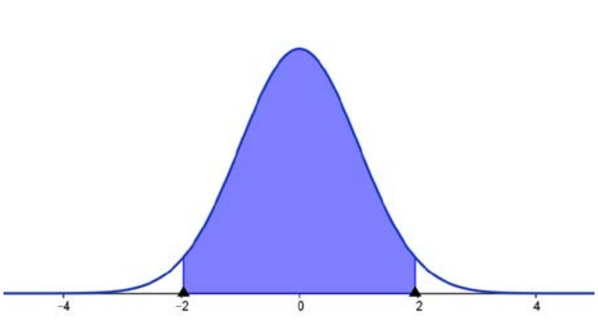
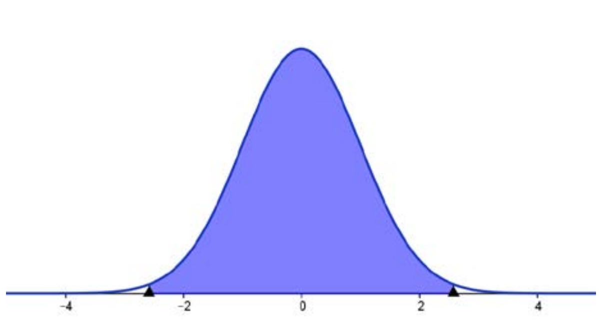
Démonstration :

Soit F la fonction définie sur] 0 ; + ∞[par $F(u) = P(-u \leq X \leq u) = \int_{-u}^{u} \varphi(t)dt$

On constate que $F(0) = 0$ et que $\lim_{u\to+\infty} F(u) = \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} \varphi(t)dt = 1$

Comme φ est strictement positive sur ℝ, F est strictement croissante sur ℝ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $\beta \in$] 0 ; 1 [il existe un unique réel u_β tel que $F(u_\beta) = \beta$ en posant $\beta = 1 - \alpha$ on obtient le résultat énoncé.

Exemples :

Pour $\alpha = 0{,}05$ On obtient $u_\alpha \approx 1{,}96$	Pour $\alpha = 0{,}01$ On obtient $u_\alpha \approx 2{,}58$
	

II) Théorème de Moivre – Laplace

Si X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\ (n\ ;\ p)$ alors la variable aléatoire $Z_n$définie par : $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(\ 0\ ;\ 1\ )$

Cela signifie que pour tout a et b réels tels que a ≤ b, on a

$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = P(\ a \leq Z \leq b)$ où Z suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1\ )$

Ce théorème est admis

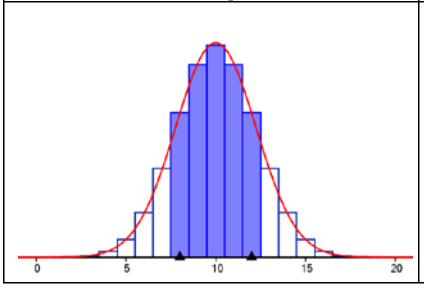
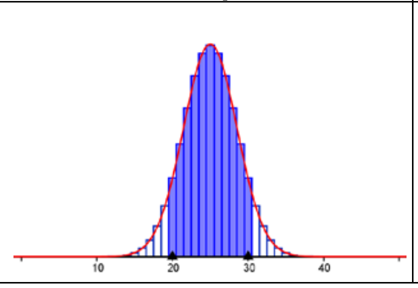
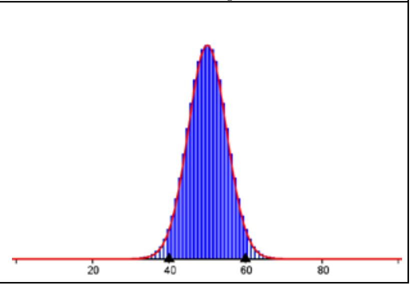
Rappel :

On dit que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(\ n\ ;\ p\ )$ de paramètres n et , si pour tout entier k compris entre 0 et n, la loi de probabilité de X_n est définie par : $P\ (X_n = k\ ) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$

Illustration :

Sur les figures suivantes les histogrammes bleus représentent la répartition de la loi binomiale et la courbe rouge représente la densité de la loi normale centrée réduite.

On constate que lorsque n devient grand l'histogramme « converge » vers la courbe rouge

$n\ =\ 20\ et\ p\ =\ 0{,}3$	$n\ =\ 50\ et\ p\ =\ 0{,}3$	$n\ =\ 100\ et\ p\ =\ 0{,}3$
		

III) Loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$

1) Définition

Soit μ un nombre réel et σ un réel strictement positif. La variable aléatoire X d'univers $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2\ )$, si la variable $X' = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(\ 0\ ;\ 1\ )$

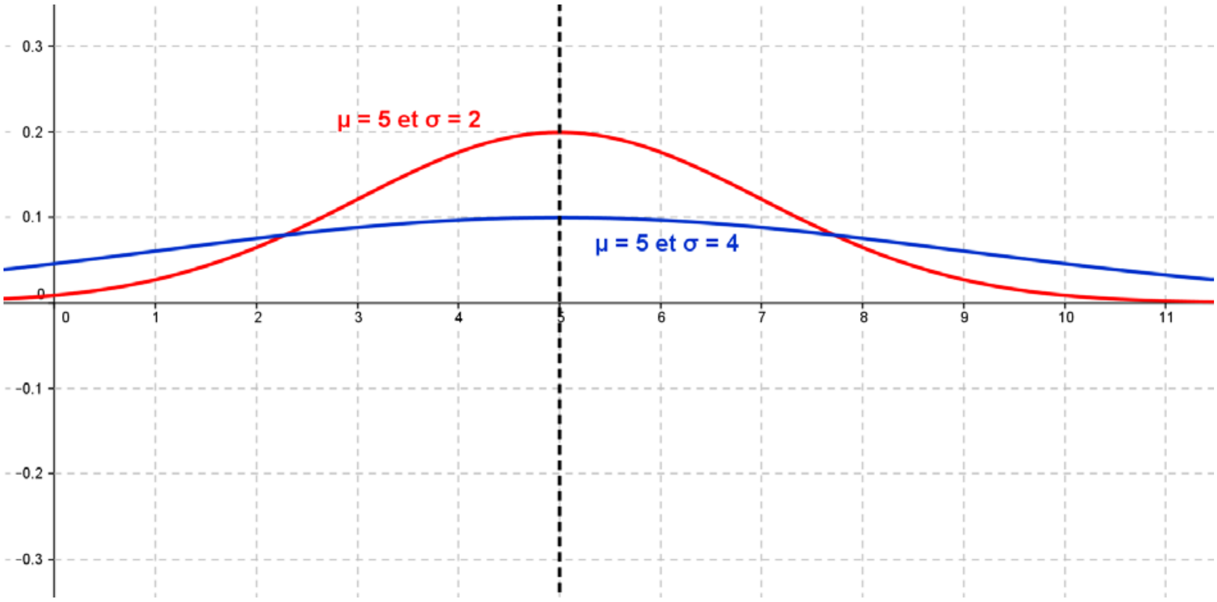
Remarques :

1) La courbe représentative de la loi $\mathcal{N}\ (\mu\,;\ \sigma^2\ )$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$

2) La densité de X est la fonction f définie sur P par $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

3) Pour tout α, β réels tels que α ≤ β on a $P(\ \alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

4) Graphique illustrant l'influence de σ



2) Fonction de répartition

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\ \sigma^2\ )$ sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P\ (\ X\ \leq x\ ) =\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =\ \Phi(\frac{X-\mu}{\sigma})$$

3) Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\ (\mu\,;\ \sigma^2\ )$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ si $\alpha \leq \beta$ alors $P(\ \alpha \leq X \leq \beta) =\ \mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$

4) Espérance mathématique et écart type

L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ est μ et son écart type de de X est σ

Exemples de calculs :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

Comme précédemment pour le calcul de probabilités on utilisera soit la calculatrice, soit une table de valeurs.

Avec une calculatrice :

Sur une calculatrice, on peut calculer les probabilités P(a ≤ X ≤ b) pour a et b réels en indiquant les valeurs de a, b , μ et σ (attention on indique σ et non σ^2)

Exemple : avec X suivant la loi $\mathcal{N}(5\,;\,4)$ on obtient P(1,5 ≤ X ≤ 6)≈ 0 ,6514

Pour calculer les probabilités P($\boldsymbol{X}$ ≤ b) on procède de la façon suivante :

- Si b ≥ μ P(X ≤ b)= 0,5+ P (μ ≤ X ≤ b)
- Si b ≤μ P(X ≤ b)= 0,5 – P (b ≤ X ≤ μ)

Avec une table de valeurs :

Soit on possède une table de valeurs donnant F(x) = P(X ≤ x) pour la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ alors P(a ≤ X ≤ b) = F(b) – F(a)

Soit on ne possède que la table de valeurs donnant $\Phi(\mathrm{x}) = P\,(X \leq x)$ pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$ (0 ; 1) alors P(a ≤ X ≤ b) = $\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Exemple :

avec X suivant la loi $\mathcal{N}(2\,;\,9)$ et ne possédant qu'une table de loi centrale réduite, pour calculer la probabilité p = P(1,3 ≤ X ≤ 4) il faut calculer :

$$p = \Phi\left(\frac{4-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1{,}3-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}7}{3}\right) \approx \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}23)$$

d'où $p \approx \Phi(0{,}33) - (1 - \Phi(0{,}23)) \approx$ 0,6293 – (1 – 0,5910) ≈ 0,2203

5) Résultats à retenir

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

Alors

$P(\,\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\,) \approx 0{,}6826$

$P(\,\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\,) \approx 0{,}9544$

$P(\,\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\,) \approx 0{,}9974$