Lois continues de probabilité

I) Définition

Soit I un intervalle borné ou non de ℝ . Une variable aléatoire X est dite continue de l'intervalle I si elle prend toutes les valeurs réelles de I.

Exemples :

La durée de vie d'un transistor, le temps d'attente à un guichet sont des variables aléatoires continues.

Il n'est plus possible alors de définir la loi de X en énumérant les probabilités des événements $(X = x_i)$, puisque dans ce cas , ces événements sont en nombre infini. Une autre approche est alors nécessaire.

On s'intéresse à des événements du type : « X prend des valeurs comprises entre deux valeurs distinctes ».
On étudie uniquement les variables aléatoires continues dont la loi de probabilité est déterminée par une fonction f.

II) Densité de probabilité d'une variable aléatoire

1) Définition

On appelle fonction densité de probabilité toute fonction f définie sur un intervalle [a ; b] de ℝ vérifiant les conditions suivantes :

- **f est continue sur l'intervalle [a ; b];**
- **pour tout x de [a ; b] , $f(x) \geq 0$;**
- **$\int_a^b f(t)dt = 1$ (L'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à 1).**

Exemples

1) La fonction f définie sur l'intervalle I = [0 ; 1] par $f(x) = 3x^2$ peut être considérée comme une densité de probabilité sur I. En effet f est continue et positive sur I et de plus $\int_0^1 f(x)dx = [x^3]_0^1 = 1$

2) La fonction g définie sur l'intervalle I = [0 ; 10] par $g(x) = \dfrac{x}{50}$ peut être considérée comme une densité de probabilité sur I. En effet g est continue et positive sur I et de plus $\int_0^{10} g(x)dx = \left[\frac{x^2}{100}\right]_0^{10} = 1$

Remarques :

• Lorsque f est définie sur un intervalle non borné, par exemple [a ; + ∞ [, la condition portant sur l'aire sous la courbe de f s'écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$$

• Lorsque f est définie sur $\mathbb{R}$ la condition portant sur l'aire sous la courbe de f s'écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$$

2) Variable aléatoire X de densité f

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction densité de probabilité définie sur I.

On dit que la loi de X admet f comme densité de probabilité lorsque, pour tout intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$ inclus dans I , on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt \,.$$

Remarques :

• On dit que la variable aléatoire X suit **la loi continue de densité f sur I**

• Si I = [a ; b] alors :

1) $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt = 1$.

2) $P(X \leqslant c) = \int_a^c f(t)dt$.

3) $P(X \geqslant c) = 1 - P(X \leqslant c) = 1 - \int_a^c f(t)dt$.

4) Pour tout intervalle [c ; d] inclus dans I , $0 \leqslant P(c \leqslant X \leqslant d) \leqslant 1$. En effet pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$ et $\int_c^d f(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)dt$. On retrouve des caractérisations analogues à celles des lois de probabilité discrètes

• P (X = α) = 0 , pour tout $\alpha \in$ I . La probabilité d'une valeur fixe isolée est nulle.
Il en résulte que : $P(X < \alpha) = P(X \leqslant \alpha)$.

Exemples :

1) Si X est une variable aléatoire définie sur I = [0 ; 1] de densité $f(x) = 3x^2$ alors

$P(0{,}2 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{0,2}^{0,5} f(x)dx = 0{,}5^3 - 0{,}2^3 = 0{,}125 - 0{,}008 = 0{,}117$ et

$P(X \leq 0{,}7) = \int_0^{0,7} f(x)dx = 0{,}7^3 = 0{,}343$

2) Si Y est une variable aléatoire définie sur I = [0 ; 10] de densité $g(x) = \dfrac{x}{50}$ alors

$P(4 \leq X \leq 8) = \int_4^8 g(x)dx = \dfrac{8^2}{100} - \dfrac{4^2}{100} = = 0{,}64 - 0{,}16 = 0{,}48$ et

$P(Y \geq 5) = \int_5^{10} g(x)dx = \frac{10^2}{100} - \frac{5^2}{100} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

3) Espérance mathématique d'une variable X de densité f

- **Si I = [a, b]** $\quad$ **E**(X) = $\int_a^b t \times f(t)dt$
- **Si I = [a ; + ∞[** $\quad$ **E**(X) = $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x t \times f(t)dt$
- **Si I = $\mathbb{R}$** $\quad$ **E**(X) = $\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t \times f(t)dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt$

Remarque : L'espérance mathématique de la variable aléatoire correspond à la valeur moyenne prise par X sur l'intervalle I

Exemples : sur les deux exemples précédents on a :

1) $E(X) = \int_0^1 t\, f(t)dt = \int_0^1 3t^3 dt = \dfrac{3}{4}$

2) $E(Y) = \int_0^{10} t\, g(t)dt = \int_0^{10} \dfrac{t^2}{50}\,\mathrm{dt} = \dfrac{10^3}{150} = \dfrac{20}{3}$