

# Etude de limites de suite

## I) Limite d'une suite infinie

### 1) Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = n^2 + 3$

et  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par :

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 2 v_n + 1 \end{cases}$$

| ▲  | A        | B         | C            |
|----|----------|-----------|--------------|
| 1  | <b>n</b> | <b>Un</b> | <b>Vn</b>    |
| 2  | 0        | 3         | -3           |
| 3  | 1        | 4         | -5           |
| 4  | 2        | 7         | -9           |
| 5  | 3        | 12        | -17          |
| 6  | 4        | 19        | -33          |
| 7  | 5        | 28        | -65          |
| 8  | 6        | 39        | -129         |
| 9  | 7        | 52        | -257         |
| 10 | 8        | 67        | -513         |
| 11 | 9        | 84        | -1025        |
| 12 | 10       | 103       | -2049        |
| 13 | 11       | 124       | -4097        |
| 14 | 12       | 147       | -8193        |
| 15 | 13       | 172       | -16385       |
| 16 | 14       | 199       | -32769       |
| 17 | 15       | 228       | -65537       |
| 18 | 16       | 259       | -131073      |
| 19 | 17       | 292       | -262145      |
| 20 | 18       | 327       | -524289      |
| 21 | 19       | 364       | -1048577     |
| 22 | 20       | 403       | -2097153     |
| 23 | 21       | 444       | -4194305     |
| 24 | 22       | 487       | -8388609     |
| 25 | 23       | 532       | -16777217    |
| 26 | 24       | 579       | -33554433    |
| 27 | 25       | 628       | -67108865    |
| 28 | 26       | 679       | -134217729   |
| 29 | 27       | 732       | -268435457   |
| 30 | 28       | 787       | -536870913   |
| 31 | 29       | 844       | -1073741825  |
| 32 | 30       | 903       | -2147483649  |
| 33 | 31       | 964       | -4294967297  |
| 34 | 32       | 1027      | -8589934593  |
| 35 | 33       | 1092      | -17179869185 |
| 36 | 34       | 1159      | -34359738365 |
| 37 | 35       | 1228      | -68719476737 |
| 38 | 36       | 1299      | -1,37439E+11 |
| 39 | 37       | 1372      | -2,74878E+11 |

Si on calcule, à l'aide d'un tableur, les valeurs de ces deux suites, on observe que :

- plus  $n$  est grand, plus  $u_n$  devient grand

On conjecture que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$

- plus  $n$  est grand, plus  $|v_n|$  tend vers  $+\infty$ .

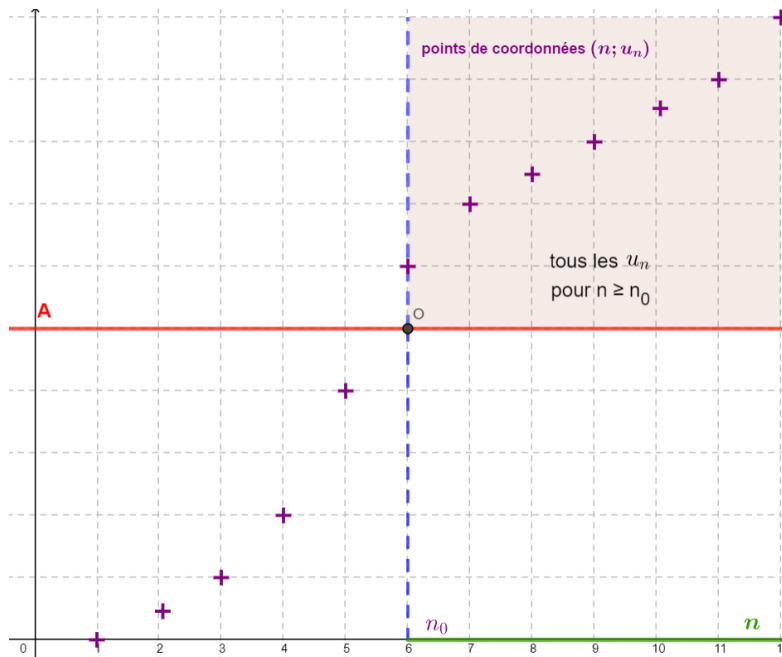
Comme  $v_n < 0$ , on conjecture que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$

### 2) Limite égale à $+\infty$

**Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  lorsque tout intervalle du type  $]A ; +\infty[$  ( $A \in \mathbb{R}$ ) contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang. On note :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

### Illustration graphique :



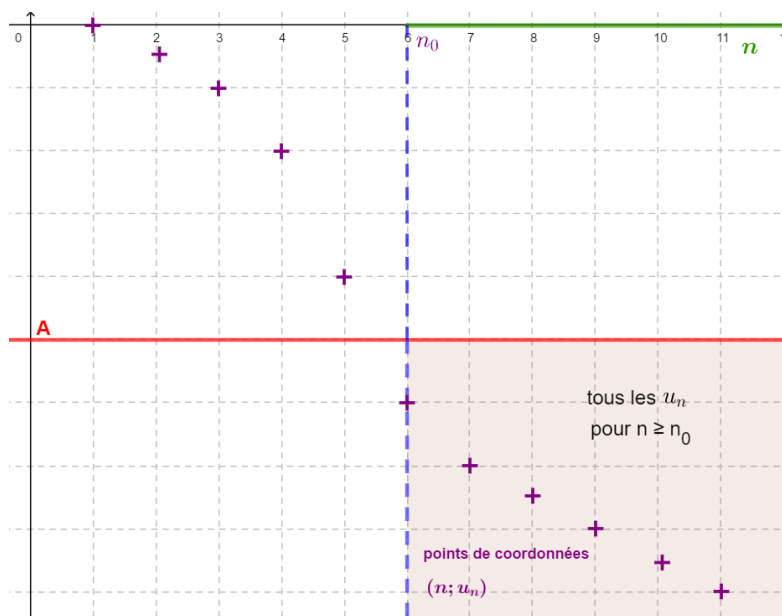
Aussi grand que soit le nombre réel  $A$ , on peut toujours trouver un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$   $u_n > A$ .

### 3) Limite égale à $-\infty$

Une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  lorsque tout intervalle du type  $] -\infty ; A[$  ( $A \in \mathbb{R}$ ) contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

### Illustration graphique :



Aussi grand que soit le nombre réel  $A$ , on peut toujours trouver un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$   $u_n < A$ .

### Remarques:

- $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  signifie que la suite  $(v_n)$  telle que pour tout entier  $n$ :  $v_n = -u_n$  tend vers  $+\infty$
- Dire qu'une suite a pour limite  $+\infty$  revient aussi à dire que son terme général  $u_n$  est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

#### **4) Exemples de suites de limite infinie**

Pour toute suite arithmétique  $(u_n)$  de raison  $r$  :

Si  $r > 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$

Si  $r < 0$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

Pour toute suite géométrique  $(u_n)$  de raison  $q$  :

Si  $u_0 > 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$

Si  $u_0 < 0$  et  $q > 1$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

#### **5) Suites de référence de limites infinies**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

**et plus généralement on a :**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$

### **II) Limite d'une suite égale à un nombre réel**

#### **1) Exemple**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

|    | A | B   | C          | D |
|----|---|-----|------------|---|
| 1  |   | U0  | 4          |   |
| 2  |   | U1  | 3          |   |
| 3  |   | U2  | 2,5        |   |
| 4  |   | U3  | 2,25       |   |
| 5  |   | U4  | 2,125      |   |
| 6  |   | U5  | 2,0625     |   |
| 7  |   | U6  | 2,03125    |   |
| 8  |   | U7  | 2,015625   |   |
| 9  |   | U8  | 2,0078125  |   |
| 10 |   | U9  | 2,00390625 |   |
| 11 |   | U10 | 2,00195313 |   |
| 12 |   | U11 | 2,00097656 |   |
| 13 |   | U12 | 2,00048828 |   |
| 14 |   | U13 | 2,00024414 |   |
| 15 |   | U14 | 2,00012207 |   |
| 16 |   | U15 | 2,00006104 |   |
| 17 |   | U16 | 2,00003052 |   |
| 18 |   | U17 | 2,00001526 |   |
| 19 |   | U18 | 2,00000763 |   |
| 20 |   | U19 | 2,00000381 |   |
| 21 |   | U20 | 2,00000191 |   |
| 22 |   | U21 | 2,00000095 |   |
| 23 |   | U22 | 2,00000048 |   |
| 24 |   | U23 | 2,00000024 |   |
| 25 |   | U24 | 2,00000012 |   |
| 26 |   | U25 | 2,00000006 |   |
| 27 |   | U26 | 2,00000003 |   |
| 28 |   | U27 | 2,00000001 |   |
| 29 |   | U28 | 2,00000001 |   |
| 30 |   | U29 | 2          |   |
| 31 |   | U30 | 2          |   |

Si on calcule, à l'aide d'un tableur, les valeurs de cette suite, on observe que plus  $n$  est grand, plus  $u_n$  se rapproche de 2 :

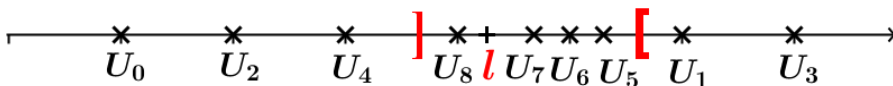
On conjecture que la limite de la suite  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  **est 2**

## 2) Définition

**Une suite  $(u_n)$  a pour limite un nombre réel  $\ell$  si pour tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang. On**

**note :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

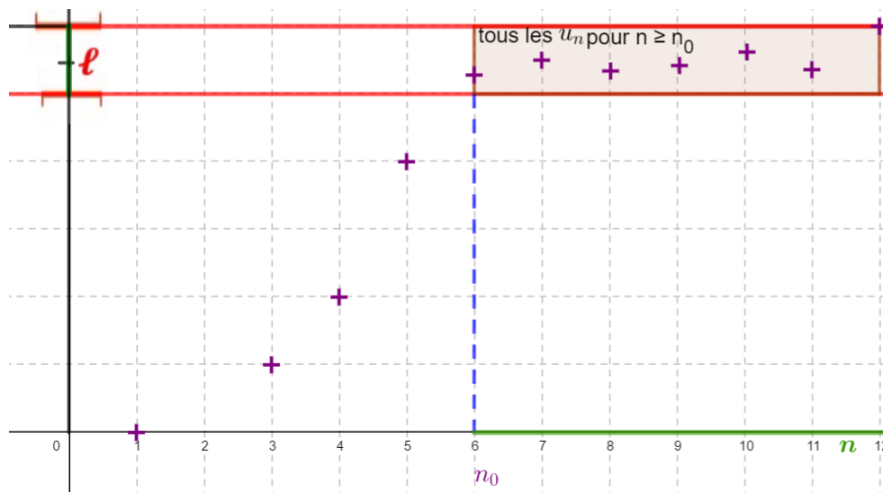
**On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$**



### Remarques :

- Cette définition traduit l'accumulation des termes  $u_n$  autour de  $\ell$  (comme dans le tableau ci-dessus on voit qu'au bout d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de sa limite 2).
- On ne peut parler de limite d'une suite que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel  $\ell$  revient aussi à dire que son terme général  $u_n$  est aussi proche de  $\ell$  que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Dire qu'une suite a pour limite un nombre réel  $\ell$  revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$ , contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.

### Illustration graphique :



Aussi petite soit la longueur de l'intervalle  $I$  contenant la limite  $\ell$ , on peut trouver un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in I$

### 3) Propriété (admise)

Si une suite a pour limite un nombre réel  $\ell$ , alors cette limite est unique.

### 4) Exemple

Pour toute suite géométrique  $(u_n)$  de raison  $q$  :

Si  $-1 < q < 1$  alors cette suite converge vers 0.

### 5) Suites de référence de limites finies

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

et plus généralement on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$

### III) Suites qui n'ont pas de limites

Il existe qui n'admettent aucune limite ni finie, ni infinie

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = 1$$

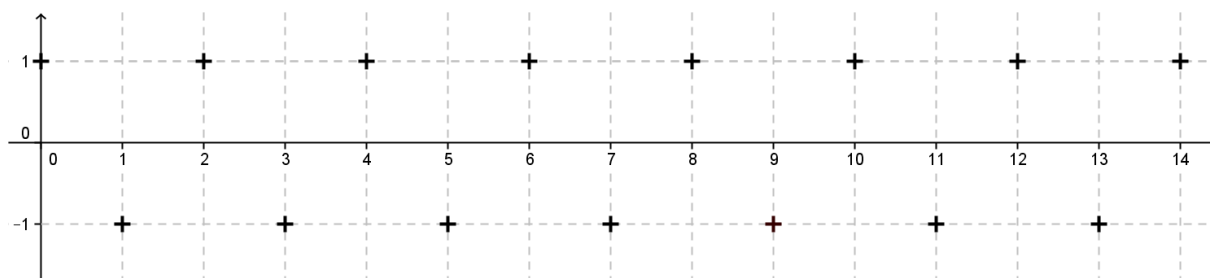
$$u_3 = -1$$

etc .....

Si  $n$  est pair  $u_n = 1$  et Si  $n$  est impair  $u_n = -1$

Il paraît clair que la suite n'admet pas de limite.

Le graphique, ci-dessous, de la suite  $(u_n)$  montre clairement qu'elle ne peut avoir de limite :



**Explication rigoureuse :**

- L'intervalle  $]2 ; +\infty[$  ne contient aucun terme de la suite  $(u_n)$  : donc elle n'a pas pour limite  $+\infty$
- L'intervalle  $] -\infty ; -2 [$  ne contient aucun terme de la suite  $(u_n)$  : donc elle n'a pas pour limite  $-\infty$
- S'il existe une limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  différente de 1 et  $-1$  alors il existe un intervalle suffisamment étroit autour de  $\ell$  qui ne contient ni 1 ni  $-1$ . Or cet intervalle ne contient aucun terme de la suite  $(u_n)$ . Cette suite n'a donc pas pour limite  $\ell$ .
- La suite  $(u_n)$  n'a donc pas de limite.

## **IV) Suites convergentes. Suites divergentes**

**Une suite convergente est une suite qui a une limite finie**

**Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente (c'est-à-dire une suite qui n'a pas de limite ou qui a une limite infinie)**

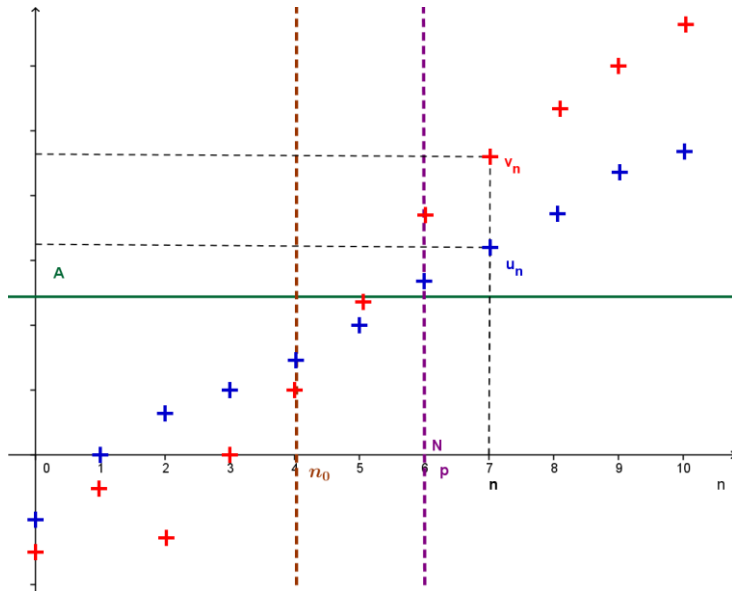
## **V) Limite et comparaison**

### **1) Théorème 1**

**$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites. Si pour tout entier naturel  $n$  supérieur à un certain entier naturel  $n_0$  :**

- **$u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$**
- **$u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$**

### Illustration graphique :



## 2) Exemples

**Exemple 1 :** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{n}{\sqrt{n-5}}$  pour  $n \geq 6$

Pour tout entier  $n \geq 6$ ,  $\sqrt{n-5} < \sqrt{n}$

et donc pour tout entier  $n \geq 6$  :  $\frac{1}{\sqrt{n-5}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

D'où pour tout entier  $n \geq 6$  :  $\frac{n}{\sqrt{n-5}} > \frac{n}{\sqrt{n}}$  soit :  $\frac{n}{\sqrt{n-5}} > \sqrt{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , alors le théorème de comparaison permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n-5}} = +\infty$$

**Exemple 2 :** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \frac{-n}{\sqrt{n-3}}$  pour  $n \geq 4$

Pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $\sqrt{n-3} < \sqrt{n}$

et donc pour tout entier  $n \geq 4$  :  $\frac{1}{\sqrt{n-3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

D'où pour tout entier  $n \geq 4$  :  $\frac{n}{\sqrt{n-3}} > \frac{n}{\sqrt{n}}$

Nous obtenons donc : pour tout entier  $n \geq 4$  :  $\frac{-n}{\sqrt{n-3}} < \frac{-n}{\sqrt{n}}$

soit :  $\frac{-n}{\sqrt{n-3}} < -\sqrt{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ , alors le théorème de comparaison permet de conclure:

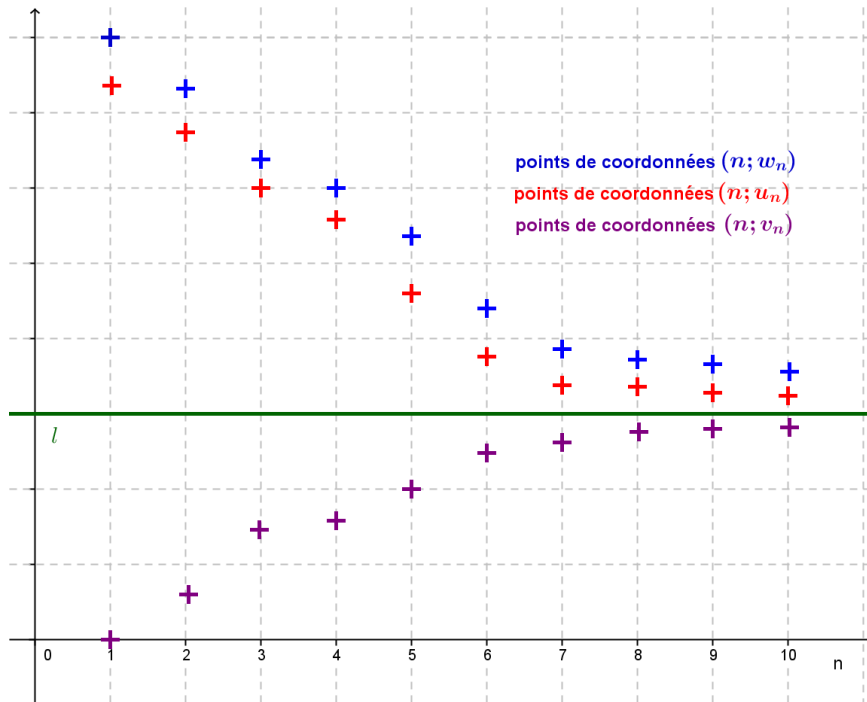
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{\sqrt{n-3}} = -\infty$$

### 3) Théorème d'encadrement ( dit : « théorème des gendarmes »)

$(u_n)$ ,  $(w_n)$  et  $(v_n)$  sont trois suites. Si pour tout entier naturel  $n$  supérieur à un certain entier naturel  $n_0$  :  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et si les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers la même limite  $\ell$ , alors la suite  $(u_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

Ce théorème est admis.

Illustration graphique :



**Exemple :** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_n = \frac{2 + 5(-1)^n}{n}$  pour  $n \geq 1$  :

Pour tout  $n \geq 1$  :  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

et donc pour tout entier  $n \geq 1$  :  $-5 \leq 5(-1)^n \leq 5$

D'où pour tout entier  $n \geq 1$  :  $2 + (-5) \leq 2 + 5(-1)^n \leq 2 + 5$

Nous obtenons donc : pour tout entier  $n \geq 1$   $\frac{-3}{n} \leq \frac{2 + 5(-1)^n}{n} \leq \frac{7}{n}$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n} = 0$  donc le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + 5(-1)^n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

La suite  $(u_n)$  étant encadrée par deux suites qui convergent vers 0, converge aussi vers 0.

## VI) Opérations et limites

### 1) Limite d'une somme

|                                     |                |           |           |           |                    |
|-------------------------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|--------------------|
| Si $(u_n)$ a pour limite :          | $\ell$         | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$          |
| Si $(v_n)$ a pour limite :          | $\ell'$        | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$          |
| Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite : | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme indéterminée |

### 2) Limite d'un produit

|                                          |                     |                 |                                                 |                    |
|------------------------------------------|---------------------|-----------------|-------------------------------------------------|--------------------|
| Si $(u_n)$ a pour limite :               | $\ell$              | $\ell (\neq 0)$ | $\pm \infty$                                    | 0                  |
| Si $(v_n)$ a pour limite :               | $\ell'$             | $+\infty$       | $\pm \infty$                                    | $\infty$           |
| Alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite : | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$       | $\pm \infty$<br>On applique la règle des signes | Forme indéterminée |

### 3) Limite d'un quotient

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

|                                           |                      |           |                                                 |                    |
|-------------------------------------------|----------------------|-----------|-------------------------------------------------|--------------------|
| Si $(u_n)$ a pour limite :                | $\ell$               | $\ell$    | $\pm \infty$                                    | $\pm \infty$       |
| Si $(v_n)$ a pour limite :                | $\ell' (\neq 0)$     | $+\infty$ | $\ell' (\neq 0)$                                | $\pm \infty$       |
| Alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite : | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0         | $\pm \infty$<br>On applique la règle des signes | Forme indéterminée |

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

|                                           |                                                 |                             |                    |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------|
| Si $(u_n)$ a pour limite :                | $\ell (\neq 0)$ ou $\infty$                     | $\ell (\neq 0)$ ou $\infty$ | 0                  |
| Si $(v_n)$ a pour limite :                | 0+                                              | 0-                          | 0                  |
| Alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite : | $\pm \infty$<br>On applique la règle des signes |                             | Forme indéterminée |

## 4) Exemples

**Exemple 1 :** Déterminer la limite de la suite  $u_n = \frac{1}{n^3} + 5$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} + 5 = 0 + 5 = 5$

**Exemple 2 :** Déterminer la limite de la suite  $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n}$ :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \sqrt{n} = 0 + \infty = +\infty$

**Exemple 3 :** Déterminer la limite de la suite  $u_n = n - \sqrt{n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  on obtient une forme indéterminée : «  $+\infty - \infty$  »

Pour ne plus avoir une forme indéterminée, en général, une factorisation suffit, en prenant comme facteur le terme dominant :

$$u_n = n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$  }  $+\infty \times 1 = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

**Exemple 4 :** Déterminer la limite de la suite  $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 1 = +\infty$  et  $n^2 + n = +\infty$  on obtient une forme indéterminée : «  $\frac{\infty}{\infty}$  »

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est  $n^2$  dans les deux cas.

Pour  $n \geq 1$  :

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$  }  $2 \times 1 = 2$  donc

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  par conséquent :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$  }  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} = 2$

**Exemple 5 :** Déterminer la limite de la suite  $u_n = \frac{7n + 3}{n^2}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7n + 3 = +\infty$  et  $n^2 = +\infty$  on obtient une forme indéterminée : «  $\frac{\infty}{\infty}$  »

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est  $n$  pour le numérateur et  $n^2$  pour le dénominateur.

Pour  $n \geq 1$  :

$$\frac{7n+3}{n^2} = \frac{n(7+\frac{3}{n})}{n^2 \times 1} = \frac{7+\frac{3}{n}}{n}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 + \frac{3}{n} = 7$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n+3}{n^2} = \mathbf{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 + \frac{3}{n} = 7 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \frac{7}{+\infty} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7+\frac{3}{n}}{n} = 0$$