Equations produit-nul
Equations du type $x^2 = a$

I) Equation produit-nul

1) Définition :

Une équation produit-nul est une équation qui peut s'écrire sous la forme d'un produit égale à 0

Exemples :

$(5x+3)(3x-2) = 0$ est une équation produit-nul

$7(3x+4)(7x+1) = 0$ est une équation produit-nul

Mais $7(3x+4) + (7x+1) = 0$ n'est pas une équation produit-nul c'est une somme

2) Propriété :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul.

Donc, pour tout nombre réel a nous pouvons écrire :

$$\mathbf{0 \times a = 0} \text{ **ou** } \mathbf{a \times 0 = 0}$$

3) Propriété Réciproque :

Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul.

Donc, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

D'une manière générale :

si $(ax+b)(cx+d) = 0$ on a alors $(ax+b) = 0$ ou $(cx+d) = 0$
puis on résout séparément les deux équations :

Exemple :

Résoudre l'équation $(9x-7)(5x+9) = 0$

C'est une équation produit-nul :

Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$9x-7=0$ ou $5x+9=0$

$9x = 7$ ou $5x = -9$

$x = \frac{7}{9}$ ou $x = -\frac{9}{5}$ L'équation produit $(9x-7)(5x+9) = 0$ admet deux solutions $\frac{7}{9}$ et $-\frac{9}{5}$

II) Equations se ramenant à une équation produit-nul

1) Résolution par factorisation à l'aide d'un facteur commun

Exemple : Résoudre l'équation : $(7x+3)(4x+7)+(7x+3)(2x-1)=0$

Méthode : Si on développe cette expression on obtient : $42x^2+60x+18=0$, nous ne pouvons pas en 3eme résoudre ce type d'équation. Donc ce n'est pas la bonne méthode.

Par contre si on regarde bien, nous pouvons voir que cette expression peut se factoriser $(7x+3)$ étant le facteur commun :

- **On factorise** $\mathbf{(7x+3)}(4x+7)+\mathbf{(7x+3)}(2x-1)=\mathbf{(7x+3)}[(4x+7)+(2x-1)]=$

$(7x+3)(6x+6)$

- **On se ramène à une équation produit-nul** en remplaçant $(7x+3)(4x+7)+(7x+3)(2x-1)$ par $(7x+3)(6x+6)$:

$(7x+3)(4x+7)+(7x+3)(2x-1)=0$ revient à résoudre : $(7x+3)(6x+6)=0$

- **On résout l'équation :**

$(7x+3)(6x+6)=0$ C'est une équation produit-nul. Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$(7x+3)=0$ ou $(6x+6)=0$

$7x+3-3=0-3$ ou $6x+6-6=0-6$

$7x=-3$ ou $6x=-6$

$x=\frac{-7}{3}$ ou $x=\frac{-6}{6}=-1$

Les solutions de cette équation sont $\frac{-7}{3}$ et-1

2) Résolution par factorisation à l'aide des identités remarquables

Exemples
Exemple 1 : Résoudre l'équation $64x^2-81=0$

Méthode :

- **On vérifie que l'expression est bien une identité remarquable et on factorise :**
$64x^2-81=(8x-9)(8x+9)$ c'est la 3ème identité remarquable avec $a=8$ et $b=9$
- **On se ramène à une équation produit-nul** en remplaçant $64x^2-81$ par $(8x-9)(8x+9)$
- **On résout l'équation :**

$(8x-9)(8x+9)\ =0$ C'est une équation produit-nul. Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$8x-9=0$ ou $8x+9=0$

$8x-9+9=0+9$ ou $8x+9-9=0-9$

$8x=9$ ou $8x=-9$

$x=\frac{9}{8}=1{,}125$ ou $x=\frac{-9}{8}=-1{,}125$

Les solutions de cette équation sont $\mathbf{1,125}$ et $\mathbf{-1,125}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $(5x-1)^2-16=0$

Méthode :

• **On vérifie que l'expression est bien une identité remarquable et on factorise :**
$(5x-1)^2-16=(5x-1)^2-4^2=(5x-1-4)(5x-1+4)=(5x-5)(5x+3)$ c'est la 3ème identité remarquable avec $a=(5x-1)$ et $b=4$

• **On se ramène à une équation produit-nul** en remplaçant $(5x-1)^2-16$ par $(5x-5)(5x+3)$

• **On résout l'équation :**

$(5x-5)(5x+3)\ =0$ C'est une équation produit-nul. Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$5x-5=0$ ou $5x+3=0$

$5x-5+5=0+5$ ou $5x+3-3=0-3$

$5x=5$ ou $5x=-3$

$x=\frac{5}{5}=1$ ou $x=\frac{-3}{5}=-0{,}6$

Les solutions de cette équation sont 1 et $-0,6$

III) Equation $x^2=a$

1) Propriété

• **Si $a\ <\ 0$ l'équation $x^2\ =a$ n'a pas de solution.**

• **Si a = 0, l'équation $x^2\ =a$ a une seule solution x = 0**

• **Si $a\ >\ 0$, l'équation $x^2\ =a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$**

Exemples :

• L'équation x^2 = -2 **n'a pas de solution**

$x^2>0$ et $-2<0$

• L'équation x² = 0 **a une seule solution qui est 0**

• L'équation $x^2=49$ a pour solutions $x=\ \sqrt{49}$ et $x=\ -\sqrt{49}$ soit $x=7$ et $x=-7$

L'équation $x^2=49$ a deux solutions : $7\ et -7$

2) Démonstration de la propriété

Résoudre l'équation $x^2\ =\ a$ revient à résoudre $x^2-a\ =0$

• **Si a > 0** alors $x^2-a=x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2$ on factorise avec la 3ème identité remarquable :
$x^2-a=x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)$

Dans le cas où $a>0$ cela revient à résoudre l'équation produit nul : $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$

Les solutions de cette équation sont les nombres x tels que :

$x-\sqrt{a}=0$ ou $x+\sqrt{a}=0$

$x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Les deux solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

• **Si a = 0** alors l'équation devient : $x^2 = 0$ donc $x = 0$

L'unique solution est donc 0

• **Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$** alors $x^2 = a$ ne peut avoir de solution puisqu'un nombre positif (x^2) ne peut être égal à un nombre négatif (a)