

Fractions

I) Egalité de fractions

1) Propriété

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si : $a \times d = c \times b$ et réciproquement
si : $a \times d = c \times b$ alors les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales

Exemples :

Les fractions $\frac{5}{12}$ et $\frac{55}{132}$ sont-elles égales ? $5 \times 132 = 660$ et $55 \times 12 = 660$ donc $\frac{5}{12} = \frac{55}{132}$

Les fractions $\frac{7}{6}$ et $\frac{6}{8}$ sont-elles égales ? $6 \times 6 = 36$ et $7 \times 8 = 56$ donc $\frac{7}{6} \neq \frac{6}{8}$

II) Addition et soustraction de fractions

1) Les fractions ont le même dénominateur

<u>a) La somme</u>	<u>b) La différence</u>
<p>Pour calculer la somme de deux fractions de même dénominateur :</p> <ul style="list-style-type: none">• On additionne les numérateurs• On garde le même dénominateur <p>Pour tout nombre a, b et c ($c \neq 0$)</p> $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	<p>Pour calculer la différence de deux fractions de même dénominateur :</p> <ul style="list-style-type: none">• On soustrait les numérateurs• On garde le même dénominateur <p>Pour tout nombre a, b et c ($c \neq 0$)</p> $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
<p>Exemple :</p> $\frac{2}{7} + \frac{11}{7} = \frac{2+11}{7} = \frac{13}{7}$	<p>Exemple :</p> $\frac{12}{13} - \frac{4}{13} = \frac{12-4}{13} = \frac{8}{13}$

2) Les fractions ont des dénominateurs différents

Méthode :

Pour additionner ou soustraire deux écritures fractionnaires qui ont des dénominateurs différents, il faut commencer par les écrire avec le **même dénominateur**.

Exemples :

Exemple 1

Calculer : $A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

Méthode 1 :

1) On cherche d'abord un dénominateur commun :

Pour cela on écrit les tables de multiplications des deux dénominateurs :

Table de multiplication de 4 :

$$\begin{aligned}4 \times 1 &= 4 \\4 \times 2 &= 8 \\4 \times 3 &= \mathbf{12}\end{aligned}$$

Table de multiplication de 6 :

$$\begin{aligned}6 \times 1 &= 6 \\6 \times 2 &= \mathbf{12}\end{aligned}$$

12 est donc le dénominateur commun

2) On écrit les deux fractions avec le même dénominateur :

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \qquad \frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

3) On effectue le calcul :

$$A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{29}{12} \qquad \mathbf{A = \frac{29}{12}}$$

Méthode 2 :

1) Décomposons en produit de facteurs premiers des deux nombres afin de trouver un dénominateur commun :

$4 = 2 \times 2$ et $6 = 2 \times 3$ Pour trouver le plus petit dénominateur commun nous allons procéder de la façon suivante :

Prenons tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits ; s'ils apparaissent plusieurs fois, nous leur attribuons leur plus grand nombre de fois où ils apparaissent, effectuons ensuite le produit :

Dans 4, 2 apparaît deux fois alors que dans 6 il apparaît une seule fois donc nous allons prendre 2×2 (le plus grand nombre de fois où il apparaît) de plus dans 6 il y a aussi 3 comme facteur premier, donc nous allons aussi le multiplier (puisque nous prenons tous les facteurs), le résultat est donc :

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

Le plus petit dénominateur commun est donc 12

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \qquad \frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

2) On écrit les deux fractions avec le même dénominateur :

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \qquad \frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

3) On effectue le calcul :

$$A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{29}{12} \qquad \mathbf{A = \frac{29}{12}}$$

Exemple 2 : Calculer $A = \frac{7}{6} + \frac{3}{2}$

a) Il faut d'abord chercher un dénominateur commun :

On remarque que 6 est un multiple de 2 :

$$2 \times 3 = 6$$

$$A = \frac{7}{6} + \frac{3 \times 3}{2 \times 3}$$

b) Ensuite les deux fractions sont écrites avec le même dénominateur :

$$\frac{7}{6} \text{ ne change pas} \quad \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

c) Maintenant nous pouvons calculer

$$A = \frac{7}{6} + \frac{9}{6}$$

$$A = \frac{16}{6}$$

d) Il ne faut surtout pas oublier de simplifier le résultat

$$A = \frac{2 \times 8}{2 \times 3}$$

$$A = \frac{8}{3}$$

Exemple 3 : Calculer $B = \frac{7}{15} - \frac{9}{5} + \frac{11}{3}$

a) Il faut d'abord chercher un dénominateur commun :

On remarque que 15 est à la fois un multiple de 5 et de 3

$$15 \times 1 = 15$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$3 \times 5 = 15$$

b) Ensuite les trois fractions sont écrites avec le même dénominateur :

$$\frac{7}{15} \text{ ne change pas}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{9 \times 3}{5 \times 3} = \frac{27}{15}$$

$$\frac{11}{3} = \frac{11 \times 5}{3 \times 5} = \frac{55}{15}$$

c) Maintenant nous pouvons calculer :

$$C = \frac{7}{15} - \frac{9}{5} + \frac{11}{3} = \frac{7}{15} - \frac{27}{15} + \frac{55}{15} = \frac{35}{15}$$

d) Il ne faut surtout pas oublier de simplifier le résultat :

$$C = \frac{35}{15} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} = \frac{7}{3}$$

$$C = \frac{7}{3}$$

En 5^{ème} nous nous limitons au cas où un dénominateur est multiple de l'autre.

En 4^e tous les cas sont traités.

III) Multiplication de fractions

1) Règle de calcul

Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire,

Il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples :

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{2 \times 5}{7 \times 11} = \frac{10}{77}$$

$$\frac{5}{9} \times 7 = \frac{5}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{5 \times 7}{9 \times 1} = \frac{35}{9}$$

Il ne faut pas oublier de simplifier avant de multiplier !! Pour cela on décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers

(c'est la méthode la plus simple que je conseille)

2) Exemples

Exemple 1 : Calculer et simplifier : $\frac{45}{21} \times \frac{14}{72}$

Nous décomposons chaque nombre en produit de facteurs premiers :

$45 = 3 \times 3 \times 5$ $14 = 2 \times 7$ $21 = 3 \times 7$ et $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$ puis nous remplaçons dans le produit :

$$\frac{45}{21} \times \frac{14}{72} = \frac{45 \times 14}{21 \times 72} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{2} \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2} = \frac{5}{12} \quad \text{donc} \quad \frac{45}{21} \times \frac{14}{72} = \frac{5}{12}$$

Exemple 2 : Calculer et simplifier : $\frac{24}{10} \times \frac{45}{56}$

Nous décomposons chaque nombre en produit de facteurs premiers :

$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ $45 = 3 \times 3 \times 5$ $10 = 2 \times 5$ et $56 = 7 \times 2 \times 2 \times 2$ puis nous remplaçons dans le produit :

$$\frac{24}{10} \times \frac{45}{56} = \frac{24 \times 45}{10 \times 56} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2} = \frac{27}{14} \quad \text{donc} \quad \frac{24}{10} \times \frac{45}{56} = \frac{27}{14}$$

IV) Inverse d'une fraction

1) propriété

Tout nombre relatif non nul $\frac{c}{d}$ a pour inverse le nombre $\frac{d}{c}$

Exemples :

L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

L'inverse de $\frac{5}{4}$ est $\frac{4}{5}$

L'inverse de $-\frac{1}{5}$ est -5

L'inverse de $-\frac{3}{7}$ est $-\frac{7}{3}$

Attention ! Ne pas confondre avec l'opposé :

L'opposé de 2 est -2

L'opposé de $\frac{5}{4}$ est $-\frac{5}{4}$

L'opposé de $-\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{5}$

L'opposé de $-\frac{3}{7}$ est $\frac{3}{7}$

V) Division de deux fractions

1) propriété

a, b, c et d sont des nombres relatifs ($b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$)

Pour diviser un nombre relatif $\frac{a}{b}$ par un nombre non nul $\frac{c}{d}$:

on multiplie $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$ c'est-à-dire :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

2) Exemples :

Exemple 1 : Calculer et simplifier $\frac{3}{4} \div \frac{7}{5}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

Il ne faut pas oublier, lorsque cela est possible, de simplifier avant de multiplier !!

Exemple 2 : Calculer et simplifier $\frac{12}{25} \div \frac{16}{35}$

Il faut penser à décomposer en produit de facteurs premiers pour avoir un résultat sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{12}{25} \div \frac{16}{35} = \frac{12}{25} \times \frac{35}{16} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 5}{5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{21}{20}$$