Inéquations

I) Inégalités

1) Notations et définitions

a et b désignent deux nombres relatifs :

• « a < b » se lit « a est inférieur à b » ce qui signifie que le nombre a est plus petit que le nombre b

• « a > b » se lit « a est supérieur à b » ce qui signifie que le nombre a est plus grand que le nombre b

• « a $\leq$ b » se lit « a est inférieur ou égal à b » ce qui signifie que le nombre a est soit plus petit, soit égal au nombre b

• « a $\geq$ b » se lit « a est supérieur ou égal à b » ce qui signifie que le nombre a est soit plus grand, soit égal au nombre b

Exemple 1 :

On peut écrire que : $5 \geq 5$ car $5 = 5$ ou $7{,}5 \geq 5$ car 7,5 est plus grand que 5

Exemple 2 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x \leq 4$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petit ou égal à 4

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$.

Exemple 3 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x < 3$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petits que 3

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

Remarque :

$x > 0$ se traduit par **« x est strictement positif »** c'est-à-dire que le nombre x est positif mais il ne peut pas être égal à 0

$x < 0$ se traduit par **« x est strictement négatif »** c'est-à-dire que le nombre x est négatif mais il ne peut pas être égal à 0

II) Ordre et opérations

1) Propriétés

Addition et soustraction	Multiplication et division	
Si on additionne ou on soustrait les deux membres d'une inégalité par un même nombre on ne change pas le sens de l'inégalité. C'est-à-dire : Quels que soient les nombres relatifs a, b et c: Si a < b alors : $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$	Si on multiplie, ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif on ne change pas le sens de l'inégalité. C'est-à-dire : Quels que soient les nombres relatifs a, b et c: Si $a < b$ et $c < 0$ alors $a \times c < b \times c$	Si on multiplie, ou divise, les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité C'est-à-dire : Quels que soient les nombres relatifs a, b et c: Si $a < b$ et $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$

2) Exemples

Exemple 1 : On sait que $x < 12$ alors $x + 15 < 12 + 15$ soit $x + 15 < 27$

Exemple 2 : x est un **nombre entier positif** tel que $x - 3 \leq 2$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x - 3 \leq 2$.alors

$x \underbrace{- 3 + 3} \leq \underbrace{2 + 3}$

$x + \quad 0 \quad \leq \underbrace{\ 5\ }$

$x \leq 5$

Donc $x \leq 5$. Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 5

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Exemple 3 : On sait que $x < 10$ alors $x - 12 < 10 - 12$ soit $x - 12 < -2$

Exemple 4 : x est **un nombre entier positif** tel que $x+5 \leq 8$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x+5 \leq 8$. alors

$x+\underbrace{5-5} \leq 8-5$

$x+\underbrace{\ 0\ } \leq \ 3$

$x \leq \ 3$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 3
Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

Exemple 5 :

On sait que $x \leq 5$ alors $x \times 7 \leq 5 \times 7$ c'est-à-dire $7x \leq 35$

Exemple 6:

On sait que $x < 5$ alors $x \times (-3) > 5 \times (-3)$ c'est-à-dire $-3x > -15$

Exemple 7 :

x est un nombre entier positif tel $\frac{x}{3} \leq 2$.Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$\frac{x}{3} \leq 2$ donc :

$\frac{x \cancel{\times 3}}{\cancel{3}} \leq 2 \times 3$ C'est-à-dire :

$x \leq 6$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 6

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2, 3. 4, 5 et 6.

Exemple 8 :

x est un **nombre entier négatif** tel que $\frac{x}{-2} \leq 3$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$\frac{x}{-2} \leq 3$ donc :

$\frac{x \times \cancel{(-2)}}{-2} \geq 3 \times (-2)$. C'est-à-dire :

$x \geq -6$

Comme le nombre x est un nombre entier négatif supérieur ou égal à -6

Les solutions possibles sont : -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0.

III) Inéquation du 1 er degré à une inconnue

1) définitions

Définition 1 :

Une inéquation à une inconnue est une inégalité comprenant un nombre inconnu désigné par une lettre.

Exemple :

L'inégalité : $3x + 2 < 7x + 1$ est une inéquation à une inconnue.
Le nombre inconnu est désigné par la lettre x

Définition 2 :

Résoudre une inéquation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'inégalité.

Exemple :
Les solutions de l'inéquation $9x + 5 \geq 6x + 1$ sont tous les nombres x vérifiant cette inégalité

Méthode pour résoudre une inéquation :

Exemple 1
Résoudre $4x \leq 16$

$$4x \leq 16$$

On isole x en divisant les deux membres par 4

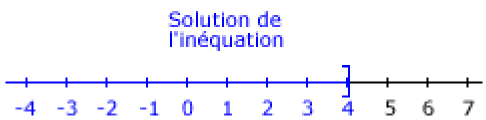
(4 > 0 on garde le sens de l'inégalité)

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{16}{4}$$

Soit $x \leq \frac{16}{4}$ donc $\boldsymbol{x \leq 4}$.

Tous les nombres inférieurs ou égale à 4 sont solution de l'inéquation $4x \leq 16$

Représentation des solutions sur une droite graduée :



4 fait partie
de l'ensemble des solutions

Exemple 2
Résoudre $-4x < 16$

$$-4x < 16$$

On isole le x en divisant les deux membres par – 4

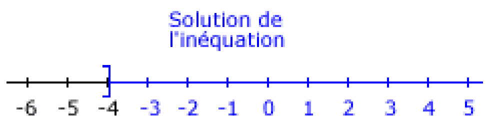
(– 4 < 0 on change le sens de l'inégalité)

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{16}{-4}$$

Soit $x > -\frac{16}{4}$ donc $\boldsymbol{x > -4}$.

Tous les nombres supérieurs à – 4 sont solution de l'inéquation $-4x < 16$

Représentation des solutions sur une droite graduée :



– 4 ne fait pas partie
de l'ensemble des solutions

IV) Résolution d'un problème se ramenant à une inéquation

La résolution d'un problème du premier degré se fait en cinq étapes :

- **Choix de l'inconnue**
- **Mise en inéquation du problème**
- **Résolution de l'inéquation**
- **Vérification du résultat**
- **Interprétation du résultat et conclusion**

Exemple : Inès a eu 12 sur 20 a sa première évaluation. Quelle note dit-elle obtenir à sa prochaine évaluation pour que sa moyenne soit supérieure ou égale à 14 ?

1) Choix de l'inconnue :

On commence par nommer l'inconnue que l'on cherche :

Soit $\boldsymbol{x}$ la note de la deuxième évaluation

2) Mise en inéquation du problème :

La 1ere évaluation est 12/20 la deuxième est x

La moyenne est donc : $\frac{12+x}{2}$

Sa moyenne soit supérieure ou égale à 14 : On obtient donc l'inéquation suivante :

$\frac{12+x}{2} \geq 14$

3) Résolution de l'inéquation :

$\frac{12+x}{2} \geq 14$ On multiplie par 2 les deux membres de l'inégalité

$\frac{12+x}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \geq 14 \times 2$

$12+x \geq 28$

$12 - 12 + x \geq 28 - 12$

$x \geq 28 - 12$

$x \geq 16$

4) Vérification du résultat :

Si $x \geq 16$ alors sa moyenne est supérieure ou égale à $\frac{12+16}{2}$ c'est-à-dire que sa moyenne est bien supérieure ou égale à 14.

5) Conclusion, interprétation du résultat :

Inès doit avoir au moins 16/20 a sa deuxième évaluation.
(La note a sa deuxième évaluation doit être supérieure ou égale à 16 sur 20)