Equations du premier degré à une inconnue

I) Tester si une égalité est vraie ou fausse

1) Exemple 1 et méthode

L'égalité $7x + 8 = 12x - 4$ est –elle vraie pour x = 6 ?

Méthode :

1) On remplace x par 6 dans l'expression située à gauche de l'égalité :

$\mathbf{7 \times 6 + 8 = 42 + 8 = 50}$

2) Puis on remplace x par 6 dans l'expression située à droite de l'égalité :

$12 \times 6 - 4 = 72 - 4 = 68$

3) On compare les deux résultats obtenus

Les deux résultats obtenus **sont différents** donc l'égalité $7\,x + 8 = 12\,x - 4$ est **fausse** pour $x = 6$

2) Exemple 2 et méthode

L'égalité $9x + 8 = 7\,x + 10$ est-elle vraie pour x = 1 ?

Méthode :

1) On remplace x par 1 dans l'expression située à gauche de l'égalité :

$\mathbf{9 \times 1 + 8 = 9 + 8 = 17}$

2) Puis on remplace x par 1 dans l'expression située à droite de l'égalité :

$\mathbf{7 \times 1 + 10 = 7 + 10 = 17}$

3) On compare les deux résultats obtenus

Les deux résultats obtenus sont **égaux** donc l'égalité :

$9\,x + 8 = 7\,x + 10$ est **vraie** pour $x = 1$.

On dit que 1 est solution de l'équation : $9\,x + 8 = 7\,x + 10$

II) Résolution d'équations

1) définitions

Définition 1 :

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité comprenant un nombre inconnu désigné par une lettre.

Exemple :

L'égalité : $3x + 2 = 7x + 1$ est une équation du premier degré à une inconnue.
Le nombre inconnu est désigné par la lettre x

Définition 2 :

Résoudre une équation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité.
Chaque valeur de x est une solution de cette équation.

Exemple : Résoudre l'équation $x - 2 = 7$

Comme 9 – 2 = 7 La valeur de x qui vérifie l'égalité est 9.

L'équation $x - 2 = 7$ a une solution qui est 9

2) Règles :

Si on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité
Si on multiplie ou divise un même nombre aux deux membres d'une égalité :
On ne change pas les solutions de l'équation

3) Résolutions des équations de base :

a) Equation du type $x + a = b$

Exemple : Résoudre l'équation $x + 64 = 150$

Méthode 1 : (méthode intuitive)

$$x \underset{-64}{\overset{+64}{\rightleftarrows}} 150$$

$x = 150 - 64 = 86$

La solution de l'équation est 86

Méthode 2 :

$x + 64 - 64 = 150 - 64$

*(Il faut **isoler le x** à gauche du signe = afin d'avoir « x =résultat » : Pour cela on **soustrait** 64 aux deux membres de l'égalité afin d'éliminer le +64 à gauche du signe =)*

$x = 150 - 61 = 89$

La solution de l'équation est 89

On pense à vérifier son résultat en remplaçant x par la valeur trouvée :
$86 + 64 = 150$ ***. La solution trouvée vérifie bien l'égalité***

b) Equation du type $x - a = b$

Exemple : Résoudre l'équation $x - 25 = 140$

Méthode 1 : (méthode intuitive)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "-25"] & 140 \arrow[l, bend left, "+25"] \end{tikzcd}$$

$x = 140 + 25 = 165$

La solution de l'équation est 165

Méthode 2 :

$x - 25 \mathbf{+ 25} = 140 \mathbf{+ 25}$

*(Il faut **isoler le x** à gauche du signe = afin d'avoir « x =résultat » : Pour cela on **additionne** 25 aux deux membres de l'égalité afin d'éliminer le −25 à gauche du signe =)*

$x = 140 + 25 = 165$

La solution de l'équation est 165

On pense à vérifier son résultat en remplaçant x par la valeur trouvée : $165 - 25 = 140$***. La solution trouvée vérifie bien l'égalité***

c) Equation du type $\frac{x}{a} = b$

Exemple : Résoudre l'équation $\frac{x}{10} = 20$

Méthode 1 : (méthode intuitive)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\div 10"] & 20 \arrow[l, bend left, "\times 10"] \end{tikzcd}$$

$x = 20 \times 10 = 200$

La solution de l'équation est 200

Méthode 2 :

$\frac{x \times \cancel{10}}{\cancel{10}} = 20 \times \mathbf{10}$

*(Il faut **isoler le x** à gauche du signe = afin d'avoir « x =résultat » : Pour cela on **multiplie par 10** les deux membres de l'égalité*

$x = 20 \times 10 = 200$

La solution de l'équation est 200

On pense à vérifier son résultat en remplaçant x par la valeur trouvée : $\frac{200}{10}$ ***= 20. La solution trouvée vérifie bien l'égalité***

d) Equation du type $ax = b$

Exemple : Résoudre l'équation $9x = 108$

Méthode 1 : (méthode intuitive)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\times 9"] & 108 \arrow[l, bend left, "\div 9"] \end{tikzcd}$$

$x = 108 \div 9 = 12$

La solution de l'équation est 12

Méthode 2 :

$\frac{\cancel{9}x}{\cancel{9}} = \frac{108}{\mathbf{9}}$

*(Il faut **isoler le x** à gauche du signe = afin d'avoir « x =résultat » : Pour cela on **divise par 9** les deux membres de l'égalité*

$x = 108 \div 9 = 12$

La solution de l'équation est 12

On pense à vérifier son résultat en remplaçant x par la valeur trouvée :
$9 \times 12 = 108$. ***La solution trouvée vérifie bien l'égalité***

4) Résolution d'équations plus complexes

a) Equation du type : $ax + c = b$

Exemple : Résoudre l'équation $5x + 2 = 27$

Méthode 1 : (méthode intuitive)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\times 5"] & {} \arrow[r, bend left, "+2"] \arrow[l, bend left, "\div 5"] & 27 \arrow[l, bend left, "-2"] \end{tikzcd}$$

$27 - 2 = 25$ et $25 \div 5 = 5$ donc $x = 5$

La solution de l'équation est 5

Méthode 2 :

$5x + 2 = 27$

*(Il faut **isoler le** $5x$ à gauche du signe = ensuite on isole le x: Pour cela on **soustrait 2** aux deux membres de l'égalité puis on divise par 5 :*

$5x + 2 - 2 = 27 - 2$ donc $5x = 25$ $\qquad \dfrac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \dfrac{25}{5}$

$x = \dfrac{25}{5} = 5$

La solution de l'équation est 5

On pense à vérifier son résultat en remplaçant x par la valeur trouvée :
$\mathbf{5 \times 5 + 2 = 25 + 2 = 27}$. ***La solution trouvée vérifie bien l'égalité***

b) Equation du type : $ax + b = cx + d$

Exemple : Résoudre l'équation $6x + 8 = 4x - 15$

$6x + 8 = 4x - 15$	
On a : $6x - \mathbf{4x} + 8 = \underbrace{4x - \mathbf{4x}} - 15$	1) **On regroupe du même côté de l'égalité les termes en x** (en général à gauche du signe =). Pour cela on soustrait $\mathbf{4x}$ aux deux membres de l'égalité
On obtient : $2x + 8 = \;\; 0 \;\;\; - 15$	2) On réduit l'expression
On a alors : $2x + 8 - \mathbf{8} = -15 - \mathbf{8}$	3) On regroupe les nombres constants de l'autre côté de l'égalité. Pour cela on soustrait $\mathbf{8}$ aux deux membres de l'égalité
Ce qui donne : $2x = -23$	4) On réduit l'expression
alors $\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = -\dfrac{23}{2}$	5) On divise par 2 les deux membres de l'égalité, pour isoler le nombre x
on a donc $x = -\dfrac{23}{2} = \mathbf{-11{,}5}$	6) On simplifie
La solution de l'équation : $\mathbf{6x + 8 = 4x - 15}$ est $\mathbf{-11,5}$	7) On n'oublie pas de conclure.

III) Modéliser un problème pour le résoudre

La résolution d'un problème se fait en cinq étapes :

- **Choix de l'inconnue**
- **Mise en équation du problème**
- **Résolution de l'équation**
- **Vérification du résultat**
- **Interprétation du résultat et conclusion**

Exemple :

Une mère de quarante-cinq ans a une fille de 13 ans.

Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère ?

1) Choix de l'inconnue :

On commence par nommer l'inconnue que l'on cherche :

Soit $\boldsymbol{x}$ le nombre d'années cherché

2) Mise en équation du problème :

L'âge de la mère après ces x années sera de $45 + x$

L'âge de la fille après ces x années sera de $13 + x$

L'âge de la fille sera la moitié de celui de sa mère, l'âge de la mère sera donc le double de celui de sa fille on a donc :

$2 \times (13 + x) = 45 + x$

3) Résolution de l'équation :

$2 \times (13 + x) = 45 + x$
$26 + 2x = 45 + x$ (On développe l'expression avant de résoudre)
$2x - x = 45 - 26$
$x = 19$

4) Vérification du résultat :

$x = 19$

Dans 19 ans

13 +19 = 32

L'âge de la fille sera de 32 ans,

45 +19 = 64

L'âge de la mère sera de 64 ans

L'âge de la fille sera bien la moitié de l'âge de la mère

5) Conclusion, interprétation du résultat :

Dans 19 ans l'âge de la fille sera la moitié de celui de sa mère.