

Ordre et opérations. Inégalités

I) Inégalités

1) Notations et définitions

a et b désignent deux nombres relatifs :

- « $a < b$ » se lit « **a est inférieur à b** » ce qui signifie que le nombre a est plus petit que le nombre b

- « $a > b$ » se lit « **a est supérieur à b** » ce qui signifie que le nombre a est plus grand que le nombre b

- « $a \leq b$ » se lit « **a est inférieur ou égal à b** » ce qui signifie que le nombre a est soit plus petit, soit égal au nombre b

- « $a \geq b$ » se lit « **a est supérieur ou égal à b** » ce qui signifie que le nombre a est soit plus grand, soit égal au nombre b

Exemple 1 :

On peut écrire que : $5 \geq 5$ car $5 = 5$ ou $7,5 \geq 5$ car 7,5 est plus grand que 5

Exemple 2 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x \leq 4$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petit ou égal à 4

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$.

Exemple 3 Ecrire tous les nombres entiers naturels x tel que $x < 3$:

On cherche tous les nombres entiers positifs plus petits que 3

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

Remarque :

$x > 0$ se traduit par « **x est strictement positif** » c'est-à-dire que le nombre x est positif mais il ne peut pas être égal à 0

$x < 0$ se traduit par « **x est strictement négatif** » c'est-à-dire que le nombre x est négatif mais il ne peut pas être égal à 0

2) Comparer deux nombres à partir de leur différence

- Dire que $a < b$ revient à dire que $a - b < 0$
- Dire que $a > b$ revient à dire que $a - b > 0$
- Dire que $a \geq b$ revient à dire que $a - b \geq 0$
- Dire que $a \leq b$ revient à dire que $a - b \leq 0$

Exemple 1 :

On sait que $x - y = 3$ Comparer x et y .

$x - y = 3$ alors on sait que $x - y > 0$ on peut donc en déduire que $x > y$.

Exemple 2 :

On sait que $x > 7$ Quelle est le signe de $x - 7$?

$x > 7$ alors $x - 7 > 0$

II) Ordre et opérations

1) Addition

Si on additionne les deux membres d'une inégalité par un même nombre on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

Si $a < b$ alors $a + c < b + c$

Exemple 1 : On sait que $x < 12$ alors $x + 15 < 12 + 15$ soit $x + 15 < 27$

Exemple 2 : x est un **nombre entier positif** tel que $x - 3 \leq 2$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x - 3 \leq 2$, alors

$$x - \underbrace{3 + 3} \leq \underbrace{2 + 3}$$

$$x + 0 \leq \underbrace{5}$$

$$x \leq 5$$

Donc $x \leq 5$. Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 5

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

2) Soustraction

Si on soustrait les deux membres d'une inégalité par un même nombre on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

Si $a < b$ alors $a - c < b - c$

Exemple 1 : On sait que $x < 10$ alors $x - 12 < 10 - 12$ soit $x - 12 < -2$

Exemple 2 : x est un nombre entier positif tel que $x + 5 \leq 8$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

Comme $x + 5 \leq 8$. alors

$$x + \underbrace{5 - 5} \leq 8 - 5$$

$$x + \underbrace{0} \leq 3$$

$$x \leq 3$$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 3

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

3) Multiplication

Propriétés :

Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif on ne change pas le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

Si $a < b$ et $c < 0$ alors

$$a \times c < b \times c$$

Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité

C'est-à-dire :

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

Si $a < b$ et $c < 0$ alors

$$a \times c > b \times c$$

Exemples :

Exemple 1 :

On sait que $x \leq 5$ alors $x \times 7 \leq 5 \times 7$ c'est-à-dire $7x \leq 35$

Exemple 2 :

x est un nombre entier positif tel $\frac{x}{3} \leq 2$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$$\frac{x}{3} \leq 2 \text{ donc :}$$

$$\frac{x \times 3}{3} \leq 2 \times 3 \text{ C'est-à-dire :}$$

$$x \leq 6$$

Comme le nombre x est un nombre entier positif inférieur ou égal à 6

Les solutions possibles sont : 0 ; 1 ; 2, 3, 4, 5 et 6.

Exemple 3 :

On sait que $x < 5$ alors $x \times (-3) > 5 \times (-3)$ c'est-à-dire $-3x > -15$

Exemple 4 :

x est un **nombre entier négatif** tel que $\frac{x}{-2} \leq 3$. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?

$$\frac{x}{-2} \leq 3 \text{ donc :}$$

$$\frac{x \times (-2)}{-2} \geq 3 \times (-2). \text{ C'est-à-dire :}$$

$$x \geq -6$$

Comme le nombre x est un nombre entier négatif supérieur ou égal à -6

Les solutions possibles sont : -6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0.

III) Encadrements

1) Définition :

a, b et x désignent des nombres relatifs.(a est plus petit que b)

Lorsque l'on écrit :

$a < x < b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x \leq b$

on dit que le nombre x est encadré par les nombres a et b,

et la différence b - a est l'amplitude de cet encadrement

2) Encadrer à partir de la troncature

Exemple 1 Donner un encadrement de $\frac{53}{21}$ d'amplitude 0,001.

La troncature au millièmè de ce nombre est 2,523 donc

$$2,523 < \frac{53}{21} < 2,524 . \text{ C' est un encadrement au millièmè de } \frac{53}{21}.$$

Exemple 2 : Donner un encadrement du nombre a dont la troncature au dixièmè est 86,7 :

$$86,7 \leq a < 86,8$$

3) Encadrer à partir de l'arrondi

Exemple 1: Donner un encadrement du nombre b dont l'arrondi au dixièmè est 9,6

$$9,55 \leq b < 9,65$$

Exemple 2 : Donner un encadrement du nombre c dont l'arrondi au centièmè est 7,42

$$7,415 \leq a < 7,425$$