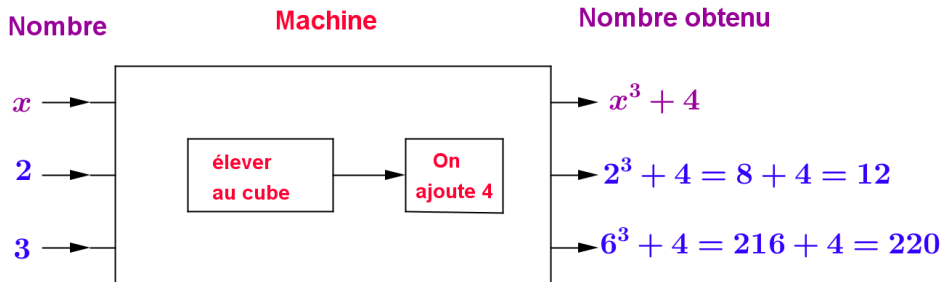


# Fonctions généralités. Parité. Graphique

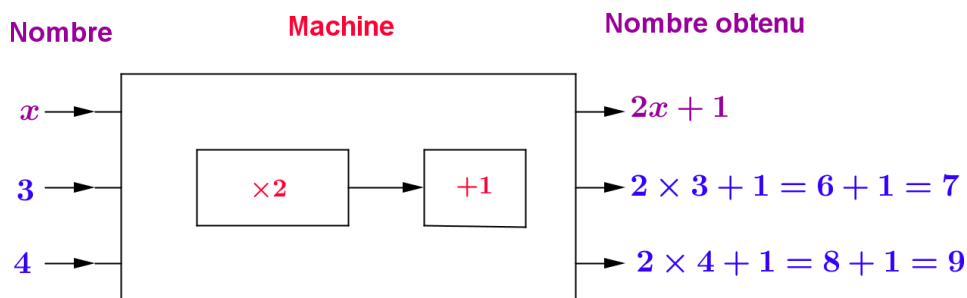
## I) Définition. Vocabulaire

### 1) Exemples :

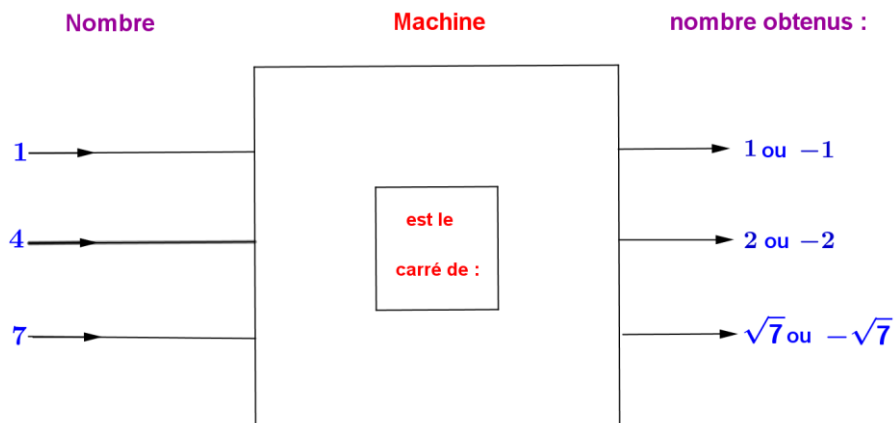
**Exemple 1 :** Voici une machine qui, lorsque nous introduisons un nombre  $x$  le transforme en un unique nombre. Ce procédé est appelé fonction



**Exemple 2 :** Voici une autre machine qui, lorsque nous introduisons un nombre  $x$  le transforme en un unique nombre. Ce procédé est appelé fonction



**Exemple 3 :** Voici une autre machine dont **le procédé ne peut être assimilé à une fonction :**

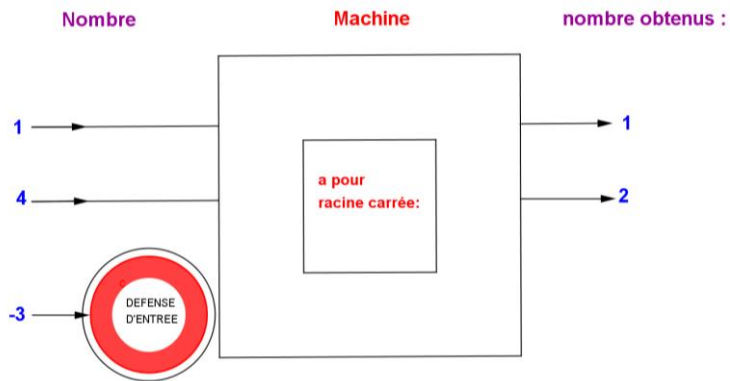


Si on introduit le chiffre 4 dans la machine, il en sort deux nombres au lieu d'un seul : 2 et - 2. Il en est de même pour 1

**Dans ce cas, ce procédé de calcul ne définit pas une fonction car il existe des nombres, qui n'ont pas un seul nombre à la sortie.**

**Remarque :** Il existe des nombres pour lesquels la fonction n'est pas définie :

**Exemple 4 :** Voici une autre machine :



Le nombre -3 ne peut pas entrer dans la machine car la racine carrée de -3 n'existe pas.

On dit que la fonction n'est pas définie en -3.

## 2) Définition :

Pour définir une fonction, on a besoin de trois données :

- Un ensemble de départ, aussi appelé domaine de définition.
- Un ensemble d'arrivée
- Un procédé qui, à tout élément de l'ensemble de départ, associe un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

Dans la rédaction mathématique, il est d'usage de désigner un tel objet mathématique par une lettre. **Souvent, la lettre  $f$  qui est utilisée.**

## 3) Notation. Définitions

- Soit  $D$  une partie de l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , le procédé de calcul qui transforme chaque nombre  $x$  de  $D$  en un seul et unique nombre réel noté  $f(x)$  est appelé fonction numérique.
- Elle se note :  
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x)$   
On le lit :  
« La fonction  $f$  définie sur  $D$  qui a tout nombre réel  $x$  de  $D$  associe le nombre  $f(x)$  »
- $f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$   
 $x$  est l'antécédent de  $f(x)$  par la fonction  $f$

**Remarque importante :** Dans la notation,  $f(x)$  désigne un nombre mais  $f$  ne désigne pas un nombre mais uniquement le nom de la fonction.

**Exemples :**

**Exemple 1 :** Soit  $f$  la fonction qui transforme chaque nombre  $x$  en un autre nombre qui est  $3x + 1$ . On dit : « Soit  $f$  la fonction qui a chaque nombre  $x$  associe le nombre  $3x + 1$  »

On le note :  $f : x \mapsto 3x + 1$  ou  $f(x) = 3x + 1$  Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}$

Si on prend  $x = 2$  alors on a :  $f(2) = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$ .

7 est l'image de 2 par  $f$  et 2 est un antécédent de 7 par  $f$

**Exemple 2 :** Soit  $g : x \mapsto x^2 - 2$  ou  $g(x) = x^2 - 2$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}$

Si on prend  $x = 7$   $g(7) = 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47$  donc  $g(7) = 47$  et

7 est un antécédent de 47 par  $g$

47 est l'image de 7 par  $g$

**Exemple 3 :** Soit  $h : x \mapsto \sqrt{x}$  Cette fonction est définie sur  $[0; +\infty[$

Si on prend  $x = 49$   $h(49) = \sqrt{49} = 7$  donc  $h(49) = 7$  et

49 est un antécédent de 7 par  $h$

7 est l'image de 49 par  $h$

## **II) Représentation graphique d'une fonction**

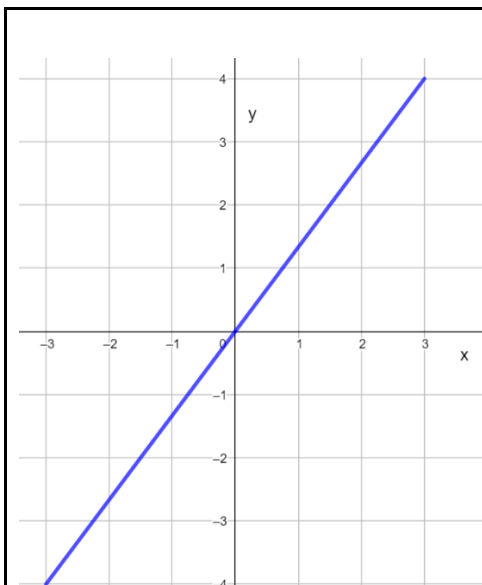
**Pour définir une fonction, on utilisera essentiellement :**

- **Une formule.** Par exemple, on pourra définir une fonction en disant : « Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 2]$  tel que  $f(x) = x^2$  ».

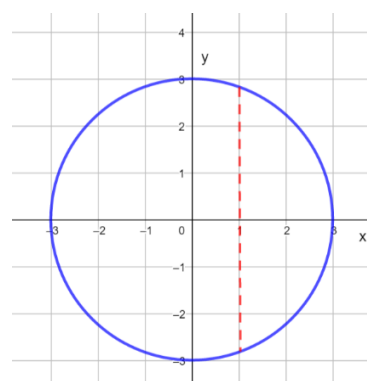
- **Une représentation graphique, une courbe dessinée dans un plan muni d'un repère :** Il est possible de représenter par une courbe une fonction définie par une formule qui est également un outil qui permet de définir une fonction. Elle doit nécessairement respecter l'une des caractéristiques des fonctions qui est de n'associer à un nombre de l'ensemble de définition qu'un seul point image.

**Soit  $f$  une fonction,  $D$  son ensemble de définition et  $x$  appartenant à  $D$ . La représentation graphique (ou courbe représentative, notée  $\mathcal{C}_f$ ), dans un repère  $(O, I, J)$  de la fonction  $f$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x ; f(x))$ .**

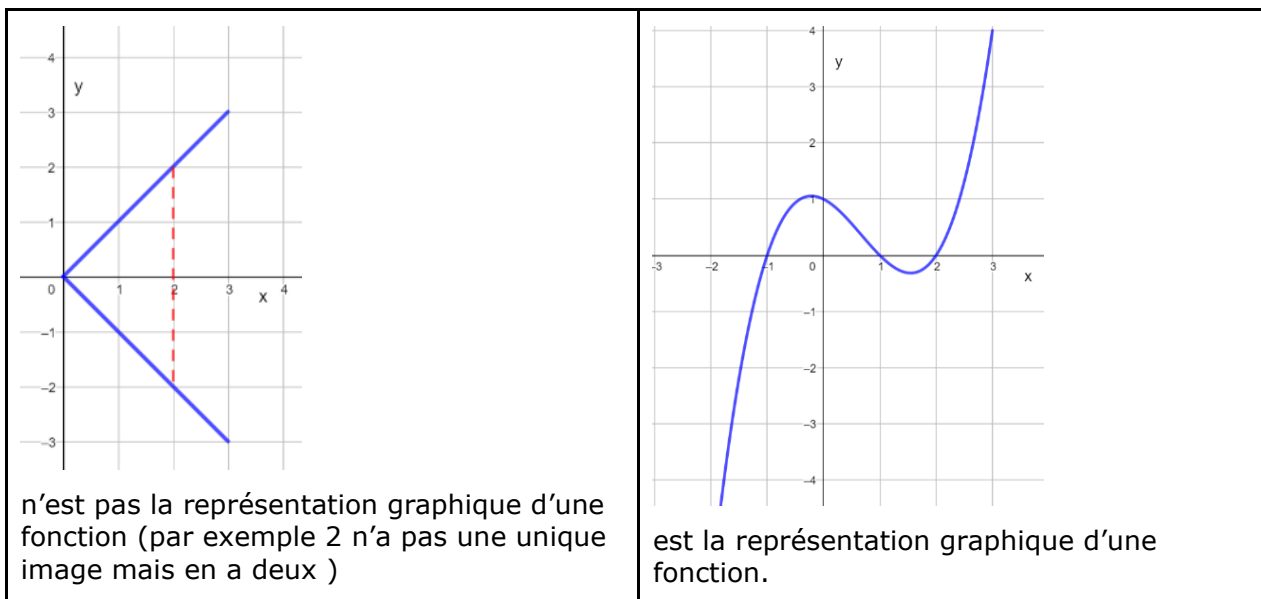
**Exemples :**



est la représentation graphique d'une fonction.



n'est pas la représentation graphique d'une fonction (par exemple 1 n'a pas une unique image mais en a deux.)



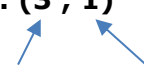
## 1) Exemples et méthode :

### a) Fonction définie par une formule

Le plan est muni d'un repère, on considère la fonction définie sur  $[0 ; 5]$  par  $f(x) = \frac{5}{x+2}$

**a. Déterminons les coordonnées du point A** appartenant à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  dont l'abscisse est 3.

Calculons l'image de 3 :  $f(3) = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$ . **Les coordonnées du point A sont : (3 ; 1)**


  
abscisse ; ordonnée

**b. Déterminons si les points B (8 ; 0,5) et C (0 ; 3) sont sur la courbe** représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  :

#### Méthode :

L'abscisse de B est 8, on calcule l'image de 8 et on vérifie qu'elle est égale à l'ordonnée de

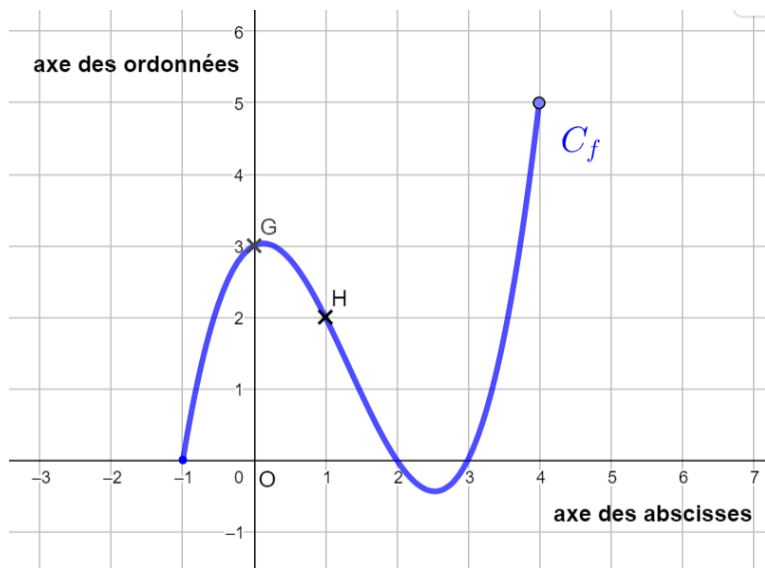
B :  $f(8) = \frac{5}{8+2} = \frac{5}{10} = 0,5$  qui est bien l'ordonnée de B, donc  $B \in \mathcal{C}_f$

L'abscisse de C est 0, on calcule l'image de 0 et on vérifie qu'elle est égale à l'ordonnée de C :

$f(0) = \frac{5}{0+2} = \frac{5}{2} = 2,5$  , or 2,5 n'est pas l'ordonnée de C , donc  $C \notin \mathcal{C}_f$

## **b) Fonction définie par un graphique**

### **Exemple 1 :**

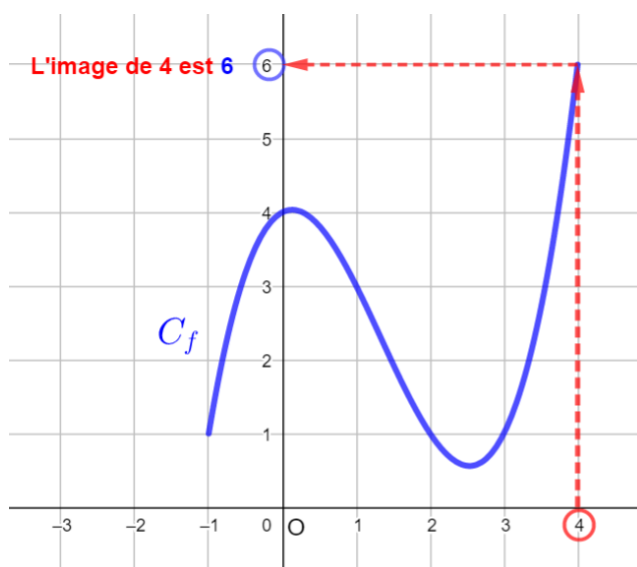


- Observons le graphique, nous voyons que la fonction  $f$  tracée ci-dessus est **définie sur  $[-1 ; 4]$** .

- **Tout point de la courbe a pour coordonnées  $(x ; f(x))$**

Par exemple le point G est sur la courbe, il a pour coordonnées  $(0 ; 3)$ , on peut donc en déduire que  $f(0) = 3$ , de même le point H  $(1 ; 2)$  est sur la courbe donc  $f(1) = 2$

#### **Lecture graphique de l'image d'une fonction :**



#### **Lecture graphique de(s) antécédent(s) d'une fonction :**



**Les antécédents de 1 sont environ :  
-1 ; 2 et 3**

### III) Parité d'une fonction

#### 1) Fonction paire

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  symétrique par rapport à 0 est paire si et seulement si pour tout  $x \in D$ ,  $f(-x) = f(x)$

**Méthode :**

Pour montrer qu'une fonction est paire sur un intervalle  $D$  :

- On vérifie que l'intervalle  $D$  est symétrique par rapport à 0.
- On calcule  $f(-x)$ , en remplaçant  $x$  par  $(-x)$  dans l'expression de  $f(x)$  et on montre qu'elle est égale à  $f(x)$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , montrons qu'elle est paire :

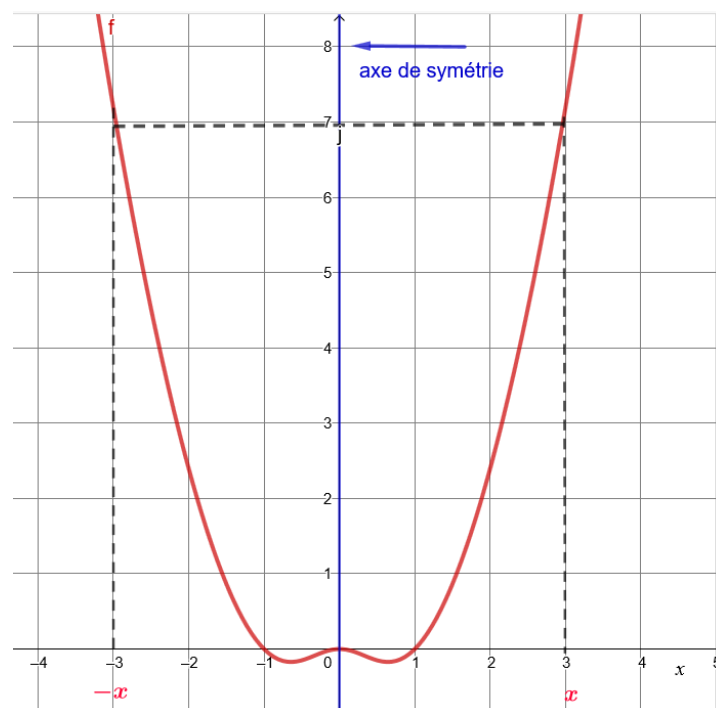
$\mathbb{R}$  est bien symétrique par rapport à 0

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2}$  Or,  $(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2$  donc  $f(-x) = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ , la fonction  $f$  est donc paire.

**Interprétation géométrique :**

La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



## 2) Fonction impaire

**Définition :**

**Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  symétrique par rapport à 0 est impaire si et seulement si pour tout  $x \in D$ ,  $f(-x) = -f(x)$**

**Méthode :**

Pour montrer qu'une fonction est impaire sur un intervalle  $D$  :

- On vérifie que l'intervalle  $D$  est symétrique par rapport à 0.
- On calcule  $f(-x)$ , en remplaçant  $x$  par  $(-x)$  dans l'expression de  $f(x)$  et on montre qu'elle est égale à  $-f(x)$ .

**Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , montrons qu'elle est impaire :

$\mathbb{R}$  est bien symétrique par rapport à 0)

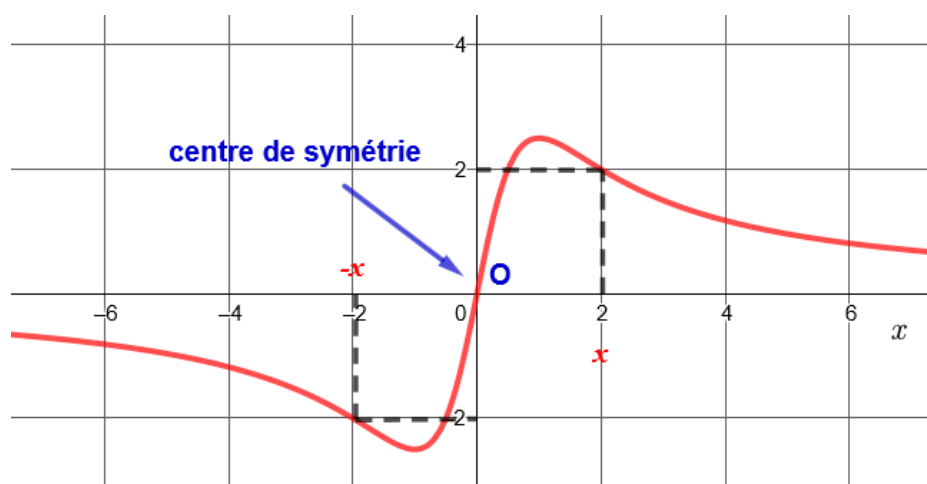
$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2}$$

$$\text{Or, } (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2 \text{ donc } f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$ , la fonction  $f$  est donc impaire.

## 3) Interprétation géométrique

**La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère O.**



**Remarques importantes :**

- Une fonction peut évidemment n'être ni paire, ni impaire.
- Si l'intervalle de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction ne sera ni paire ni impaire, inutile de calculer  $f(-x)$ .

**Exemple** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3 ; 3]$  par  $f(x) = x^2 + x$ .

Montrons que cette fonction n'est ni paire, ni impaire

### Est-elle paire ?

L'intervalle  $[-3 ; 3]$  est bien symétrique par rapport à 0.

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

$$\text{Or } f(x) = x^2 + x$$

- Etudions si pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $f(-x) = f(x)$

$$x^2 + x = x^2 - x \text{ équivaut à :}$$

$$x^2 - x^2 + x + x = 0 \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$2x = 0 \text{ soit } x = 0 ,$$

**Par conséquent  $f(-x) \neq f(x)$  sauf pour  $x = 0$ ,  $f$  n'est donc pas une fonction paire.**

### Est-elle impaire ?

L'intervalle  $[-3 ; 3]$  est bien symétrique par rapport à 0.

- De même, Etudions si pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x$$

$$x^2 - x = -x^2 - x \text{ équivaut à :}$$

$$x^2 - x + x^2 + x = 0 \text{ équivaut à :}$$

$$2x^2 = 0 \text{ équivaut à : } x = 0$$

**Par conséquent  $f(-x) \neq -f(x)$  sauf pour  $x = 0$ ,  $f$  n'est donc pas une fonction impaire.**

**$f$  n'est donc ni une fonction paire, ni une fonction impaire.**

**Remarque** : pour montrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire on peut aussi donner deux contre exemples :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par  $f(x) = 2x + 4$

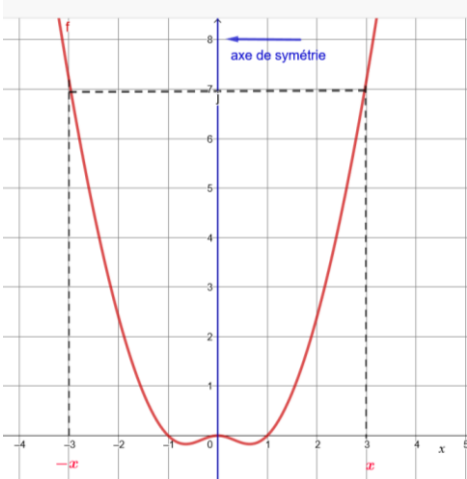
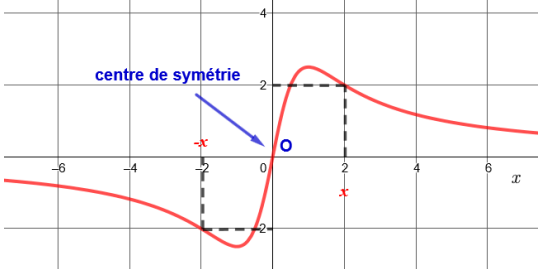
$[-5 ; 5]$  est bien symétrique par rapport à 0

$$f(3) = 2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10 \text{ et } f(-3) = 2 \times (-3) + 4 = -6 + 4 = -2 \text{ or } f(-3) \neq f(3) \text{ et } f(-3) \neq -f(3)$$

La fonction n'est donc ni paire ni impaire. Attention méthode qui ne sert qu'à montrer qu'elle ne l'est pas, si elle l'est ce sera pour toutes les valeurs de  $x$  de l'intervalle D.

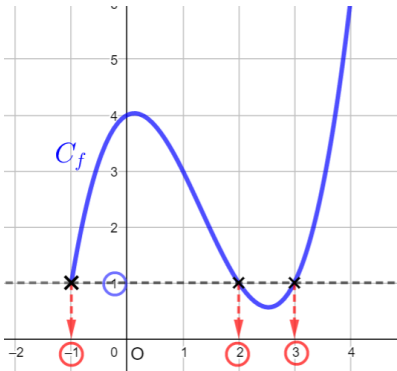
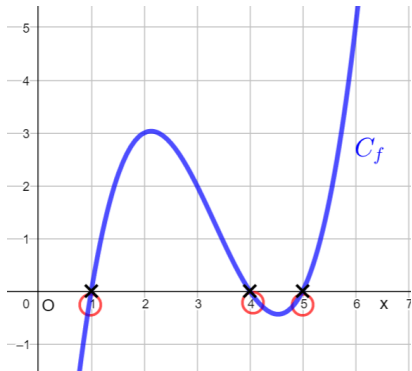
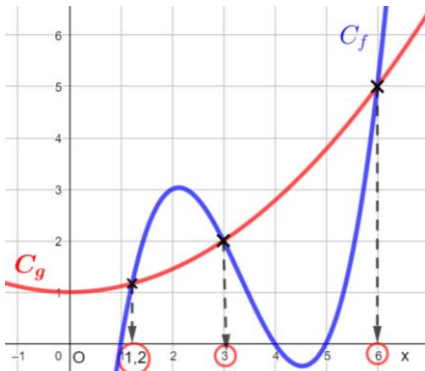
## Récapitulatif :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $D$  **symétrique par rapport à 0** :

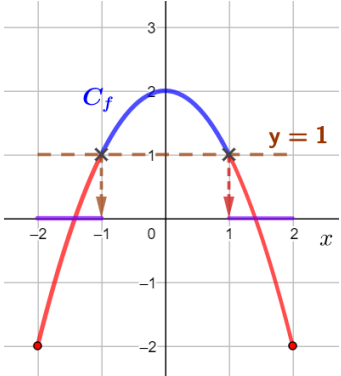
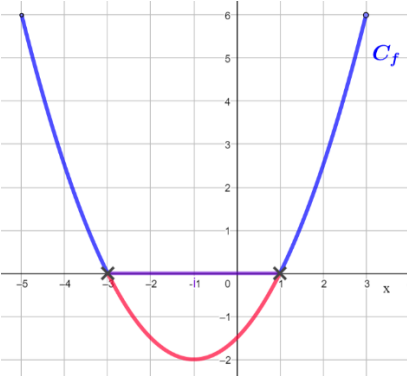
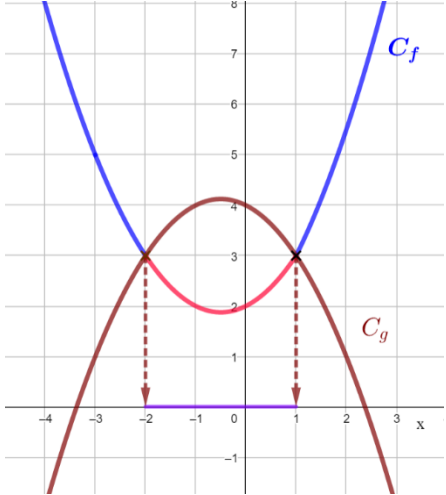
|                          | Fonction paire                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Fonction impaire                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Définition               | Pour tout $x \in D$ , $f(-x) = f(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Pour tout $x \in D$ , $f(-x) = -f(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Exemple                  | <p>Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}</math> tel que : <math>f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}</math>. Montrons qu'elle est paire.</p> <p><math>\mathbb{R}</math> est bien symétrique par rapport à 0.</p> <p>Pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2}</math><br/> Or, <math>(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2</math> donc<br/> <math>f(-x) = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)</math></p> <p><b>Pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>f(-x) = f(x)</math>, la fonction <math>f</math> est donc paire.</b></p> | <p>Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>[-3; 3]</math> tel que : <math>f(x) = \frac{x}{1+x^2}</math>. Montrons qu'elle est impaire :</p> <p>L'intervalle <math>[-3; 3]</math> est bien symétrique par rapport à 0.</p> <p>Pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2}</math><br/> Or, <math>(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2</math> donc <math>f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)</math></p> <p><b>Pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>f(-x) = -f(x)</math>, la fonction <math>f</math> est donc impaire.</b></p> |
| Interprétation graphique |  <p><b>La représentation graphique d'une fonction <b>paire</b> est <b>symétrique par rapport à l'axe des ordonnées</b>.</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  <p><b>La représentation graphique d'une fonction <b>impaire</b> est <b>symétrique par rapport à l'origine du repère O</b>.</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

## IV) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

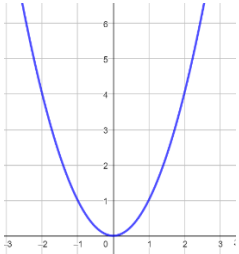
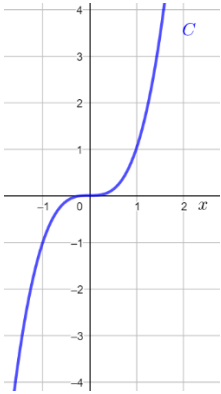
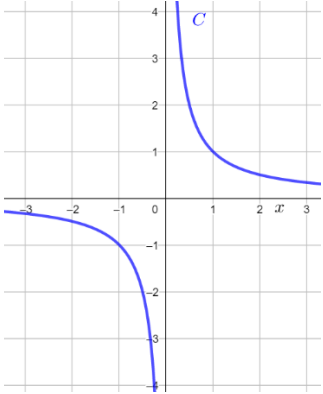
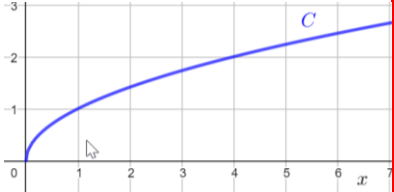
### 1) Résolution graphique d'équations

| $f(x) = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $f(x) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $f(x) = g(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Résoudre <math>f(x) = k</math> revient à déterminer tous les antécédents de <math>k</math> c'est-à-dire les abscisses de tous les points de la courbe dont l'ordonnée est <math>k</math>.</b></p>                                                                                                                              | <p><b>Résoudre <math>f(x) = 0</math> revient à déterminer tous les antécédents de 0 c'est-à-dire les abscisses de tous les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.</b></p>                                                                                                                             | <p><b>Résoudre <math>f(x) = g(x)</math> revient à déterminer les abscisses de tous les points d'intersection des deux courbes <math>C_f</math> et <math>C_g</math></b></p>                                                                                                               |
| <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) = 1</math></p>  <p>On détermine les antécédents de 1 qui sont -1 ; 2 et 3 (abscisse des points d'intersection de <math>C_f</math> avec la droite <math>y = 1</math>)<br/>donc <math>S = \{-1 ; 2 ; 3\}</math></p> | <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) = 0</math></p>  <p>On détermine les antécédents de 0 qui sont 1 ; 4 et 5 ( abscisse des points d'intersection de <math>C_f</math> avec l'axe des abscisses)<br/>donc <math>S = \{1 ; 4 ; 5\}</math></p> | <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) = g(x)</math></p>  <p>On détermine les abscisses des points d'intersection de <math>C_f</math> avec <math>C_g</math><br/>donc <math>S = \{1, 2 ; 3 ; 6\}</math></p> |

## 2) Résolution graphique d'inéquations

| $f(x) \leq k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $f(x) \leq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $f(x) \leq g(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Résoudre <math>f(x) \leq k</math></b></p> <p>a. On trace la droite <math>y = k</math><br/> b. On détermine l'ensemble des abscisses des points de <math>C_f</math> qui se trouvent en dessous de cette droite : c'est-à-dire tous les nombres <math>x</math> dont l'image est inférieure ou égale à <math>k</math></p>                                                                                                                                          | <p><b>Résoudre <math>f(x) \leq 0</math></b></p> <p>On détermine l'ensemble des abscisses des points de <math>C_f</math> qui se trouvent en dessous de l'axe des abscisses.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>Résoudre <math>f(x) \leq g(x)</math></b></p> <p>On détermine l'ensemble des abscisses des points de <math>C_f</math> qui se trouvent en dessous de <math>C_g</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) \leq 1</math></p>  <p>Nous observons que la fonction est définie sur <math>[-2 ; 2]</math>, l'ensemble des abscisses <math>x</math> de <math>C_f</math> dont les ordonnées sont inférieures ou égal à 1 appartiennent aux intervalles : <math>[-2 ; -1]</math> et <math>[1 ; 2]</math> donc<br/> <b><math>S = [-2; -1] \cup [1 ; 2]</math></b></p> | <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) \leq 0</math></p>  <p>Nous observons que la fonction est définie sur <math>[-5 ; 3]</math>, l'ensemble des abscisses <math>x</math> de <math>C_f</math> dont les ordonnées sont inférieures ou égal à 0 (en dessous de l'axe des abscisses) appartient à l'intervalle <math>[-3 ; 1]</math> donc<br/> <b><math>S = [-3; 1]</math></b></p> | <p>Exemple : Résoudre <math>f(x) \leq g(x)</math></p>  <p>Nous observons que les fonctions <math>C_f</math> et <math>C_g</math> sont définies sur <math>\mathbb{R}</math>.<br/> <math>C_f</math> est en dessous de <math>C_g</math> pour tous les points dont l'abscisse appartient à l'intervalle <math>[-2 ; 1]</math><br/> <b><math>S = [-2; 1]</math></b></p> |

## V) Les fonctions de référence

| Fonctions de référence                                  | Domaine de définition                                  | Parité                                                                                                                                                                     | Courbe représentative                                                                 |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>La fonction carrée :</b><br>$f(x) = x^2$             | $f$ est définie sur $\mathbb{R}$                       | <b><math>f</math> est une fonction paire</b><br>Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :<br>$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$<br>$f(-x) = f(x)$                                          |    |
| <b>La fonction cube :</b><br>$f(x) = x^3$               | $f$ est définie sur $\mathbb{R}$                       | <b><math>f</math> est une fonction impaire</b><br>Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :<br>$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$<br>$f(-x) = -f(x)$                                     |   |
| <b>La fonction inverse :</b><br>$f(x) = \frac{1}{x}$    | $f$ est définie sur $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ | <b><math>f</math> est une fonction impaire</b><br>Pour tout $x \in ] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ :<br>$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$<br>$f(-x) = -f(x)$ |  |
| <b>La fonction racine carrée :</b><br>$f(x) = \sqrt{x}$ | $f$ est définie sur $[0; +\infty[$                     | <b><math>f</math> n'est ni paire, ni impaire</b><br>pour tout $x \in [0; +\infty[$ , $-x \notin [0; +\infty[$                                                              |  |
| <b>La fonction valeur absolue :</b><br>$f(x) =  x $     | $f$ est définie sur $\mathbb{R}$                       | <b><math>f</math> est une fonction paire</b><br>Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :<br>$f(-x) =  -x  =  x  = f(x)$<br>$f(-x) = f(x)$                                            |  |