Inégalité, Inéquation

I) Inégalités

1) Inégalités

• $a < b$ **signifie que a est strictement inférieur à b**

• $a > b$ **signifie que a est strictement supérieur à b**

• $a \leq b$ **signifie que a est inférieur à b ou que a est égale à b, c'est-à-dire :** $a \leq b$ **signifie que** $a < b$ **ou** $a = b$

• $a \geq b$ **signifie que a est supérieur à b ou que a est égale à b, c'est-à-dire :** $a \geq b$ **signifie que** $a > b$ **ou** $a = $ **b**

2 Inégalités et opérations

a) Propriété 1 :

Si on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de cette inégalité

Ainsi quelque soit a, b et c

Si $a \leq b$ **alors** $a + c \leq b + c$	**Si** $a < b$ **alors** $a + c < b + c$
Si $a \leq b$ **alors** $a - c \leq b - c$	**Si** $a < b$ **alors** $a - c < b - c$

Exemples :

Lorsque $x \leq 7$ alors $x + 3 \leq 7 + 3$ On obtient : $x + 3 \leq 10$
Lorsque $x + 9 \leq 15$ alors $x + 9 - 9 < 15 - 9$ On obtient : $x < 6$

Lorsque $x > 5$ alors $x - 8 > 5 - 8$ On obtient : $x - 8 > -3$
Lorsque $x - 5 \geq 15$ *alors* $x - 5 + 5 \geq 15 + 5$ On obtient : $x \geq 20$

b) Propriété 2 :

• Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif on ne change pas le sens de cette inégalité

• Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité

Ainsi quelque soit a, b et c

• Si $c > 0$ et $a \leq b$ alors $ac \leq bc$

Si $c > 0$ et $a \leq b$ alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

• Si $c < 0$ et $a \leq b$ alors $ac \geq bc$ (Il faut bien faire attention au sens de l'inégalité qui change !!)

Si $c < 0$ et $a \leq b$ alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$(Il faut bien faire attention au sens de l'inégalité qui change !!)

Exemples:

• $7 > 4$ alors $7 \times 3 > 4 \times 3$ On obtient : $21 > 12$

• $\frac{x}{4} \leq 9$ alors $\frac{x}{4} \times 4 \leq 9 \times 4$. On obtient : $x \leq 36$

• $35 \geq 15$ alors $\frac{35}{5} \geq \frac{15}{5}$ On obtient : $7 \geq 3$

• $7x < 63$ alors $\frac{7x}{7} < \frac{63}{7}$. On obtient : $x < 9$

• $7 > 4$ alors $7 \times (-3) < 4 \times (-3)$ On obtient : $-21 < -12$

• $\frac{x}{-4} \leq 9$ alors $\frac{x}{-4} \times (-4) \geq 9 \times (-4)$. On obtient : $x \geq -36$

• $35 \geq 15$ alors $\frac{35}{-5} \leq \frac{15}{-5}$ On obtient : $-7 \leq -3$

•$-7x < 63$ alors $\frac{-7x}{-7} > \frac{63}{-7}$. On obtient : $x > -9$

On n'oublie surtout pas de changer le sens de l'inégalité !!!!

II) Inéquations

1) définitions

a) Définition 1 :

Une inéquation à une inconnue est une inégalité comprenant un nombre inconnu désigné par une lettre.

Exemple :

L'inégalité : $3x+2<7x+1$ est une inéquation à une inconnue.
Le nombre inconnu est souvent désigné par la lettre x

b) Définition 2 :

Résoudre une inéquation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'inégalité.

Exemple 1 :

Les solutions de l'inéquation $9x+5 \geq 6x+1$ sont tous les nombres x vérifiant cette inégalité.

Exemple 2 :

-1 ; 2 ; -5 et -7 sont ils solutions de l'inéquation : $10x+5 \geq 6x+1$?

• **Pour $x = -1$:**

a) On calcule séparément les deux membres de l'inégalité :

10×(-1) + 5 = - 10 + 5 = **-5** 6×(-1) + 1 = -6 + 1 = **-5**

b) On compare :

-5 est –il inférieur ou égal à -5 ? Comme $-5 \leq -5$ L'inégalité est vérifiée :

c) On conclut:

-1 est solution de l'inéquation : $10x+5 \geq 6x+1$?

• **Pour x = 2 :**

10×2 + 5 = 20 + 5 = **25** 6 × 2 + 1 = 12 + 1 = **13**

Comme $25 \geq 13$ L'inégalité est vérifiée

2 est solution de l'inéquation : $10x+5 \geq 6x+1$?

• **Pour x = 5 :**

10×(-5) + 5 = - 50 + 5 = **-45** 6×(-5) + 1 = -30 + 1 = **-25**

$-45 \leq -25$, L'inégalité n'est pas vérifiée

-5 n'est pas solution de l'inéquation : $10x+5 \geq 6x+1$?

- **Pour x = -7 :**

10×(-7) + 5 = - 70 + 5 = **-65** 6×(-7) + 1 = -42 + 1 = **-41**

$-65 \leq -41$, L'inégalité n'est pas vérifiée

-7 n'est pas solution de l'inéquation : $\mathbf{10x + 5 \geq 6x + 1}$?

Méthode pour résoudre une inéquation :

Exemple 1

Résoudre $4x + 5 \leq 21$

$4x + 5 - 5 \leq 21 - 5$

On soustrait les deux membres de l'inégalité par 5. On obtient :

$4x \leq 16$

On isole x en divisant les deux membres par 4

(4 > 0 on garde le sens de l'inégalité)

$\frac{4x}{4} \leq \frac{16}{4}$

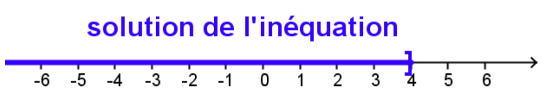
On obtient $x \leq \frac{16}{4}$ c'est-à-dire $x \leq 4.$

Tous les nombres inférieurs ou égale à 4 sont solution de l'inéquation $\mathbf{4x + 5 \leq 21}$

Soit S l'ensemble des solutions :

S =]$-\infty$; 4]

Représentation des solutions sur une droite graduée



Exemple 2

Résoudre $-4x + 5 < 15$

$-4x + 5 - 5 < 15 - 5$

On soustrait les deux membres de l'inégalité par 5. On obtient :

$-4x < 10$

On isole le x en divisant les deux membres par $-$ 4

($-$ 4 < 0 on change le sens de l'inégalité)

$\frac{-4x}{-4} > \frac{10}{-4}$

On obtient $x > \frac{10}{-4}$

Tous les nombres strictement supérieurs à $-\frac{10}{4}$ sont solution de l'inéquation $\mathbf{4x + 5} < 15$

Soit S l'ensemble des solutions :

S =] $-\frac{10}{4}$; $+\infty$[

Représentation des solutions